Proposition 3.11

Les fonctions qui au numéro p d'un arbre a associent l'étiquette de sa racine, le nombre d'enfants de sa racine, et qui à p et i associe le numéro du i-ième sous-arbre immédiat de a sont calculables.

Démonstration. Si p est le numéro de l'arbre a, l'étiquette de la racine de a est $hd(p)$, le nombre d'enfants de la racine de a est $length(tl(p))$, le numéro du i-ième sous-arbre immédiat est $nth(tl(p), i)$.

Proposition 3.12

La fonction qui, à l'entier p, associe le numéro $\ulcorner S^p(0) \urcorner$ de l'arbre $S^p(0)$ est calculable. La fonction qui, au numéro $\ulcorner S^p(0) \urcorner$ de l'arbre $S^p(0)$, associe l'entier p et aux entiers, qui ne sont pas de la forme $\ulcorner S^p(0) \urcorner$, associe 0, est calculable.

Démonstration. La première fonction est définie par récurrence, la seconde par récurrence bien fondée.

3.2.3 Les dérivations

Définition 3.8 (Règles effectives)

Soit E un ensemble d'arbres articulé et $f_1, f_2, \ldots$ des règles sur l'ensemble E. L'ensemble de règles $f_1, f_2, \ldots$ est *effectif* si l'ensemble G des numéros des listes $b, a_1, \ldots, a_n$ tels qu'il existe une règle f_i telle que $b = f_i\ a_1\ \ldots\ a_n$ est décidable, c'est-à-dire si la réunion des graphes des fonctions $f_1, f_2, \ldots$ est un ensemble décidable.

Proposition 3.13

Soit E un ensemble d'arbres articulé et $f_1, f_2, \ldots$ un ensemble de règles effectif. Alors, l'ensemble des dérivations dans $f_1, f_2, \ldots$ est décidable.

Démonstration. On montre qu'il existe une fonction calculable g qui prend en argument une liste d'arbres et retourne 1 ou 0 selon que tous ces arbres sont des dérivations ou non. On commence par remarquer que la fonction qui à une liste d'arbres associe la liste des racines de ces arbres est calculable, car elle se définit par récurrence bien fondée à partir de fonctions calculables. Soit l une liste d'arbres. Si l est la liste vide, alors on pose $g(l) = 1$. Sinon, soit $a = hd(l)$ le premier arbre de cette liste et $l' = tl(l)$ la liste formée des autres arbres de