3.2.2 La calculabilité sur les arbres

Il est également utile d'étendre la notion de calculabilité aux expressions d'un langage et plus généralement aux arbres, car cela nous permettra, entre autres exemples, de calculer avec des programmes, des propositions et des démonstrations.

Pour étendre ainsi la notion de fonction calculable, on commence par associer un entier à chaque arbre, son *numéro*, puis on dit qu'une fonction qui à un arbre t associe un arbre $F(t)$ est *calculable* si la fonction qui au numéro de t associe le numéro de $F(t)$, qui est une fonction des entiers dans les entiers, est calculable.

Définition 3.7 (La numérotation des arbres)

Soit E un ensemble muni d'une injection dans $\mathbb{N}$ qui, à chaque élément f de E, associe son *numéro* $\ulcorner f \urcorner$. On associe, à chaque arbre t, étiqueté par des éléments de E, un numéro $\ulcorner t \urcorner$, par récurrence structurelle, de la manière suivante

$$\ulcorner f(t_1, \dots, t_n) \urcorner = \ulcorner f \urcorner ; (\ulcorner t_1 \urcorner ; (\ulcorner t_2 \urcorner ; \dots (\ulcorner t_n \urcorner ; 0) \dots))$$

On peut ainsi numéroter tous les arbres étiquetés par les éléments d'un ensemble fini E : il suffit pour cela d'associer un entier quelconque à chaque élément de E. Et on montre que l'ensemble des fonctions calculables est indépendant de la numérotation choisie des éléments de l'ensemble E.

Mais bien souvent l'ensemble E est infini et est lui-même un ensemble d'arbres. Ainsi, les démonstrations sont des arbres étiquetés par des séquents, qui sont eux-mêmes des arbres étiquetés par des propositions, qui sont elles-mêmes des arbres étiquetés par des variables, des symboles de fonction et des symboles de prédicat, qui sont eux-mêmes des arbres étiquetés par les éléments d'un ensemble fini. L'ensemble des démonstrations est donc un ensemble d'arbres articulé.

Il suffit alors d'associer un entier arbitraire à chaque élément de cet ensemble fini et la définition 3.7 permet de numéroter successivement les variables, les symboles de fonction et les symboles de prédicat, puis les propositions, puis les séquents et enfin les démonstrations.

On peut procéder de même pour tous les ensembles d'arbres articulés. Et on montre que l'ensemble des fonctions calculables est indépendant de la numérotation choisie des symboles de l'ensemble fini de départ.