$n - 1 < (k+1)(k+2)/2$ et donc $p < (k+1)(k+2)/2 - k(k+1)/2 = k+1$, soit $p \leq k$. On pose $q = k - p$ et on a

$$n = k(k+1)/2 + p + 1 = (p+q)(p+q+1)/2 + p + 1 = p;q$$

La fonction ; est donc surjective.

Si maintenant $p;q = p';q'$, alors soit k le plus grand entier tel que $k(k+1)/2 \leq (p;q) - 1$. On a $k(k+1)/2 \leq (p;q) - 1 = (p+q)(p+q+1)/2 + p < (p+q)(p+q+1)/2 + p + q + 1 = (p+q+1)(p+q+2)/2$, et donc $k < p+q+1$, c'est-à-dire $k \leq p+q$. On a également $(p+q)(p+q+1)/2 \leq (p+q)(p+q+1)/2 + p = (p;q) - 1 < (k+1)(k+2)/2$ et donc $p+q < k+1$, c'est-à-dire $p+q \leq k$. On en déduit $p+q = k$. De même, on a $p' + q' = k$ et donc $p' + q' = p + q$. Comme $(p+q)(p+q+1)/2 + p + 1 = (p'+q')(p'+q'+1)/2 + p' + 1$, on en déduit $p = p'$ et donc $q = q'$. La fonction ; est donc injective.

Définition 3.5

On appelle *hd*, *head*, la fonction qui à un entier non nul n associe l'unique entier p tel qu'il existe q tel que $n = p;q$ et qui à 0 associe 0 et *tl*, *tail*, la fonction qui à un entier non nul n associe l'unique entier q tel qu'il existe p tel que $n = p;q$ et qui à 0 associe 0.

Proposition 3.6

Les fonctions ;, *hd* et *tl* sont calculables.

Démonstration. La fonction ; est définie à partir des quatre opérations et les deux fonctions réciproques à partir des quatre opérations, de la fonction caractéristique de la relation d'ordre et de la minimisation. Elles sont donc calculables.

Proposition 3.7

Si $n \neq 0$, alors $hd(n) < n$ et $tl(n) < n$.

Démonstration. $p;q > p$ et $p;q > q$.

Définition 3.6 (La numérotation des listes d'entiers)

À chaque liste d'entiers l, on associe un *numéro* de la manière suivante

$$\ulcorner p_1, \ldots, p_n \urcorner = p_1;(p_2;(\ldots;(p_n;0)\ldots))$$