7. Soient $g_1, \ldots, g_m$ et h et des fonctions respectivement dominées par les fonctions A_{i_1}, ..., A_{i_m} et A_j. Soit k le plus grand des éléments i_1, ..., i_m et j. Montrer que la composée de h et $g_1, \ldots, g_m$ est dominée par A_{k+1}.
8. Soient g et h des fonctions dominées par A_i et A_j et soit k le plus grand élément de i et j. Soit f la fonction définie par récurrence à partir de g et h. Montrer que $f(x_1, \ldots x_{n-1}, y) \leq A_{k+1}(y + max(x_1, \ldots, x_{n-1}, 4))$. Montrer que $f(x_1, \ldots, x_{n-1}, y) \leq A_{k+1}(2\, max(x_1, \ldots, x_{n-1}, y, 4))$. Montrer que $f(x_1, \ldots, x_{n-1}, y) \leq A_{k+1}(A_{k+1}(max(x_1, \ldots, x_{n-1}, y, 4)))$.
   Montrer que f est dominée par A_{k+2}.
9. Montrer que, pour toute fonction récursive primitive f, il existe un entier i tel que f soit dominée par A_i.
10. Montrer que la fonction $i \mapsto A_i(i)$ n'est pas récursive primitive.
11. Montrer que la fonction d'Ackermann n'est pas récursive primitive.

3.2 La calculabilité sur les listes et les arbres

3.2.1 La calculabilité sur les listes

La notion de fonction calculable introduite à la définition 3.1 suppose que les données avec lesquelles on calcule sont des entiers.

On peut étendre cette notion aux listes d'entiers. Pour cela, on commence par associer un entier $\ulcorner l \urcorner$ à chaque liste l, son *numéro*, puis on dit qu'une fonction qui à une liste l associe une liste $F(l)$ est *calculable* si la fonction qui au numéro de l associe le numéro de $F(l)$, qui est une fonction des entiers dans les entiers, est calculable.

Pour associer ainsi un entier à une liste, on utilise la fonction suivante.

Définition 3.4

La fonction ; est définie par

$$p; q = (p+q)(p+q+1)/2 + p + 1$$

Proposition 3.5

La fonction ; est une bijection de $\mathbb{N}^2$ dans $\mathbb{N}^*$.

Démonstration. Soit n un entier non nul. Soit k le plus grand entier tel que $k(k+1)/2 \leq n-1$ et $p = n - 1 - k(k+1)/2$. De la maximalité de k, on tire