Définition 3.2 (Ensemble décidable, semi-décidable)

Une partie A de $\mathbb{N}$ est dite *décidable* si sa fonction caractéristique est calculable, c'est-à-dire s'il existe une fonction calculable f telle que $f(x) = 1$ si $x \in A$ et $f(x) = 0$ sinon.

Elle est dite *semi-décidable* s'il existe une fonction calculable f telle que $f(x) = 1$ si $x \in A$ et f n'est pas définie en x sinon.

Exercice 3.1

Montrer que tout ensemble décidable est semi-décidable.

Définition 3.3 (Les fonctions récursives primitives)

L'ensemble des fonctions *récursives primitives* est inductivement défini comme le plus petit ensemble de fonctions contenant les projections, les fonctions identiquement nulles, la fonction successeur et clos par composition et par définition par récurrence.

Exercice 3.2

La *fonction d'Ackermann* est définie par $A_0(x) = 2^x$ et $A_{n+1}(x) = \underbrace{A_n \circ \ldots \circ A_n}_{x \text{ fois}}(1)$.

C'est-à-dire

$$\begin{aligned} A_0(x) &= 2^x \\ A_{n+1}(0) &= 1 \\ A_{n+1}(x+1) &= A_n(A_{n+1}(x)) \end{aligned}$$

1. Montrer que, pour tout i et pour tout x, $A_i(x) \geq x + 1$.
2. Montrer que, pour tout i, la fonction $x \mapsto A_i(x)$ est strictement croissante.
3. Montrer que, pour tout x, la fonction $i \mapsto A_i(x)$ est croissante.
4. Montrer que, pour tout x, $A_0(x) \geq 2x$ et, si $x \geq 2$, alors $A_0(x) \geq x + 2$. Montrer que, pour tout i et pour tout x, $A_i(x) \geq 2x$ et, si $x \geq 2$, alors $A_i(x) \geq x + 2$.
5. Montrer que, si $x \geq 2$, alors $A_{i+1}(x+2) \geq A_i(A_i(x+2))$. Montrer que, si $x \geq 4$, alors $A_{i+1}(x) \geq A_i(A_i(x))$.
6. On dit qu'une fonction f d'arité n est *dominée* par une fonction unaire g si pour tout $x_1, \ldots, x_n$, $f(x_1, \ldots, x_n) \leq g(max(x_1, \ldots, x_n, 4))$.

   Montrer que les projections, les fonctions identiquement nulles et la fonction successeur sont toutes dominées par la fonction A_0, c'est-à-dire par la fonction $x \mapsto 2^x$.