une fonction f est définie par minimisation d'une fonction g, on calcule $f(p)$ en calculant successivement la valeur de g en $(p, 0)$, en $(p, 1)$, en $(p, 2)$, ... jusqu'à trouver une valeur d'annulation, s'il en existe une. S'il n'en existe pas, la recherche d'une valeur d'annulation se poursuit indéfiniment.

Proposition 3.1 (La fonction prédécesseur)

La fonction *prédécesseur*, définie par $f(n+1) = n$ et $f(0) = 0$ est calculable.

Démonstration. Elle est définie par récurrence.

Proposition 3.2 (Les quatre opérations)

L'addition, la multiplication, la « soustraction » définie par $n \dot{-} p = n - p$ si $n \geq p$ et $n \dot{-} p = 0$ sinon, le quotient et le reste de la division euclidienne sont calculables.

Démonstration. Les fonctions $+$, $\dot{-}$ et $\times$ se définissent par récurrence. Le quotient se définit à partir de ces opérations avec la minimisation et le reste à partir du quotient, de la multiplication et de la soustraction.

Proposition 3.3 (La fonction $\chi_{\leq}$)

La fonction caractéristique de la relation d'ordre $\chi_{\leq}$, définie par $\chi_{\leq}(x, y) = 1$ si $x \leq y$ et $\chi_{\leq}(x, y) = 0$ sinon, est calculable.

Démonstration. $\chi_{\leq}(x, y) = 1 \dot{-} (x \dot{-} y)$.

Proposition 3.4 (Le test)

Soient f, g et h trois fonctions calculables. La fonction i définie sur l'intersection des trois domaines de définition de f, g et h par $i(x_1, \ldots, x_n) = g(x_1, \ldots, x_n)$ si $f(x_1, \ldots, x_n) = 0$ et $i(x_1, \ldots, x_n) = h(x_1, \ldots, x_n)$ sinon est calculable.

Démonstration. La fonction qui à trois entiers p, q, r associe q si $p = 0$ et r sinon peut être définie par récurrence

$$k(0, q, r) = q$$
$$k(p+1, q, r) = r$$

et la fonction i peut être définie par composition à partir de f, g, h et k.