– les fonctions identiquement nulles

$$x_1, \ldots, x_n \mapsto 0$$

– la fonction successeur

$$x \mapsto x + 1$$

et clos par

– la composition, c'est-à-dire l'opération associant, à h de $\mathbb{N}^m$ dans $\mathbb{N}$ et $g_1, \ldots, g_m$ de $\mathbb{N}^n$ dans $\mathbb{N}$, la fonction de $\mathbb{N}^n$ dans $\mathbb{N}$

$$x_1, \ldots, x_n \mapsto h(g_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, g_m(x_1, \ldots, x_n))$$

– la définition par récurrence, c'est-à-dire l'opération associant à g de $\mathbb{N}^{n-1}$ dans $\mathbb{N}$ et h de $\mathbb{N}^{n+1}$ dans $\mathbb{N}$, la fonction f de $\mathbb{N}^n$ dans $\mathbb{N}$ définie par

$$f(x_1, \ldots, x_{n-1}, 0) = g(x_1, \ldots, x_{n-1})$$

$$f(x_1, \ldots, x_{n-1}, y + 1) = h(x_1, \ldots, x_{n-1}, y, f(x_1, \ldots, x_{n-1}, y))$$

– et la minimisation, c'est-à-dire l'opération associant à g de $\mathbb{N}^{n+1}$ dans $\mathbb{N}$ la fonction f de $\mathbb{N}^n$ dans $\mathbb{N}$ telle que $f(x_1, \ldots, x_n)$ soit le plus petit entier y tel que $g(x_1, \ldots, x_n, y) = 0$.

Précisons les ensembles de définition de ces fonctions. Les projections, les fonctions identiquement nulles et la fonction successeur sont totales. La fonction $x_1, \ldots, x_n \mapsto h(g_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, g_m(x_1, \ldots, x_n))$ est définie en $p_1, \ldots, p_n$ si les fonctions $g_1, \ldots, g_m$ sont toutes définies en $p_1, \ldots, p_n$ et si la fonction h est définie en $g_1(p_1, \ldots, p_n), \ldots, g_m(p_1, \ldots, p_n)$. Une fonction f définie par récurrence à partir des fonctions g et h est définie en $p_1, \ldots, p_{n-1}, 0$ si g est définie en $p_1, \ldots, p_{n-1}$ et elle est définie en $p_1, \ldots, p_{n-1}, q+1$ si elle est définie en $p_1, \ldots, p_{n-1}, q$ et si h est définie en $p_1, \ldots, p_{n-1}, q, f(p_1, \ldots, p_{n-1}, q)$. La fonction f définie par minimisation d'une fonction g est définie en $p_1, \ldots, p_n$ s'il existe un entier q tel que g soit définie et non nulle en $p_1, \ldots, p_n, r$ pour tout r strictement inférieur à q et si elle est définie et nulle en $p_1, \ldots, p_n, q$.

C'est cette dernière règle qui introduit la partialité. Les trois premières règles ne permettent de construire que des fonctions totales et les deux suivantes préservent cette totalité. En revanche, la minimisation transforme la fonction totale $x, y \mapsto x$ en une fonction partielle, qui prend la valeur 0 en 0, mais n'est définie nulle part ailleurs. En effet, si p est un entier non nul, il n'existe pas de q tel que $(x, y \mapsto x)(p, q) = 0$.

Comme nous le verrons à la section 3.4.2 et au chapitre 4, le fait qu'une fonction f ne soit pas définie en un entier p peut s'interpréter comme le fait que le programme qui calcule la fonction f en p ne termine pas. En effet, quand