

# 1

## La logique des prédicats

Quelles sont les conditions que doit vérifier une proposition pour être vraie ? Une réponse possible, qui définit un certain type de vérité, est qu'une proposition est vraie quand elle est démontrable. Dans ce chapitre, nous allons détailler cette réponse en donnant une définition de cette notion de démontrabilité. Pour cela, nous allons définir, dans un premier temps, l'ensemble des *propositions*, puis, dans un second temps, celui des *théorèmes*, ou *propositions démontrables*, qui en constitue un sous-ensemble.

Ces deux définitions sont des définitions d'ensembles. Commençons donc par nous interroger sur les outils qui permettent de définir des ensembles.

### 1.1 Les définitions inductives

L'outil le plus simple pour définir un ensemble est la notion de *définition explicite*. On peut, par exemple, définir explicitement l'ensemble des nombres pairs :  $\{n \in \mathbb{N} \mid \exists p \in \mathbb{N} n = 2 \times p\}$ . Cependant, ces définitions explicites ne suffisent pas à définir tous les ensembles dont on a besoin. Un deuxième outil utile pour définir des ensembles est la notion de *définition inductive*. Cet outil s'appuie sur un théorème simple : le théorème du point fixe.