

Quand on définit une notion de vérité, comme on l'a fait dans ce chapitre, on ne peut éviter de s'interroger sur les outils qu'il est légitime d'utiliser dans cette définition. D'un côté, on ne peut pas faire comme si on ne connaissait rien. Si on ne disposait d'aucun langage, d'aucun concept, d'aucune notion préalable de vérité, comment pourrait-on donner une définition? D'un autre côté, si on disposait déjà de la notion de vérité mathématique toute entière, on pourrait donner la définition triviale : la proposition « Tout espace vectoriel admet une base » est vraie si tout espace vectoriel admet une base.

Dans ce chapitre, nous avons donné une définition intermédiaire entre ces deux extrêmes : la proposition « Tout espace vectoriel admet une base » est vraie s'il existe une démonstration π de cette proposition.

Pour énoncer cette définition, il est certes nécessaire de disposer de notions mathématiques comme celles de nombre entier, d'ensemble fini ou d'arbre. Cependant, une démonstration est constituée d'un nombre fini de symboles et le fait qu'une suite de symboles soit une démonstration d'une proposition ou non est quelque chose que chacun peut vérifier : il suffit de vérifier que chaque étape est bien l'application d'une règle de la déduction naturelle. La proposition « La suite de symboles π est une démonstration de la proposition "Tout espace vectoriel admet une base" » n'utilise donc que des objets finis et des relations vérifiables entre ces objets. On dit qu'une telle proposition est *combinatoire*. La notion préalable de vérité dont il est nécessaire de disposer pour pouvoir comprendre la définition que nous avons donnée ici se limite donc à la notion élémentaire de vérité des propositions combinatoires.