Démonstration. Si le séquent $\Gamma \vdash A$ a une démonstration en déduction naturelle, on montre par récurrence sur la structure de cette démonstration qu'il est démontrable dans le système D'. Toutes les règles de la déduction naturelles sont des règles du système D', sauf la règle *tiers exclu*. Mais, comme on l'a vu, les séquents de la forme $\Gamma \vdash A \vee \neg A$ sont démontrables dans le système D'.

Réciproquement, en utilisant la proposition 1.7, il suffit de montrer que si le séquent $\Gamma \vdash A$ est démontrable dans le système D', alors le séquent $\Gamma, \neg A \vdash \bot$ est démontrable en déduction naturelle. On montre, plus généralement, que si le séquent $\Gamma \vdash \Delta$ est démontrable dans le système D', alors le séquent $\Gamma, \neg\Delta \vdash \bot$ est démontrable en déduction naturelle, où $\neg\Delta$ est l'ensemble formé des négations des propositions de Δ. Cela se montre par récurrence sur la structure de la démonstration de $\Gamma \vdash \Delta$ dans le système D'. Si cette démonstration a la forme

$$\dfrac{\dfrac{\pi}{\Gamma \vdash A, A, \Delta'}}{\Gamma \vdash A, \Delta'}\ \text{contraction}$$

alors les ensembles $\Gamma, \neg A, \neg A, \neg\Delta$ et $\Gamma, \neg A, \neg\Delta$ sont identiques et donc, par hypothèse de récurrence, le séquent $\Gamma, \neg A, \neg\Delta \vdash \bot$ est démontrable en déduction naturelle. Si cette démonstration a la forme

$$\dfrac{\dfrac{\pi_1}{\Gamma_1 \vdash A_1, \Delta'} \quad \dots \quad \dfrac{\pi_n}{\Gamma_n \vdash A_n, \Delta'}}{\Gamma \vdash B, \Delta'}\ r$$

où r est une règle du système D', distincte de la règle *contraction*, alors par hypothèse de récurrence, les séquents $\Gamma_1, \neg A_1, \neg\Delta' \vdash \bot, \dots, \Gamma_n, \neg A_n, \neg\Delta' \vdash \bot$ sont démontrables en déduction naturelle. D'après la proposition 1.7, les séquents $\Gamma_1, \neg\Delta' \vdash A_1, \dots, \Gamma_n, \neg\Delta' \vdash A_n$ le sont également. En utilisant la règle de déduction naturelle homologue de la règle r de D', on construit une démonstration en déduction naturelle du séquent $\Gamma, \neg\Delta' \vdash B$ et donc, en utilisant la proposition 1.7 à nouveau, une démonstration du séquent $\Gamma, \neg B, \neg\Delta' \vdash \bot$.

La proposition suivante qui est l'analogue, pour le système D' de la proposition 1.6.

Proposition 1.13 (L'affaiblissement)

Si le séquent $\Gamma \vdash \Delta$ est démontrable dans le système D' alors c'est également le cas des séquents $\Gamma, A \vdash \Delta$ et $\Gamma \vdash A, \Delta$.

Démonstration. Par récurrence sur la structure de la démonstration de $\Gamma \vdash \Delta$.