1.6.1 La double négation

Une première est de remplacer cette règle par la règle

$$\frac{\Gamma \vdash \neg\neg A}{\Gamma \vdash A}\text{ double négation}$$

ce qui donne un système équivalent.

Proposition 1.11

Les séquents démontrables en déduction naturelle et dans le système dans lequel la règle *tiers exclu* est remplacée par la règle *double négation* sont les mêmes.

Démonstration. Dans un sens, on doit montrer que si le séquent $\Gamma \vdash \neg\neg A$ est démontrable en déduction naturelle, alors c'est également le cas du séquent $\Gamma \vdash A$, ce qui est une conséquence de la proposition 1.7. Dans l'autre, on doit montrer que tous les séquents de la forme $\Gamma \vdash A \vee \neg A$ sont démontrables dans le système dans lequel la règle *tiers exclu* est remplacé par la règle *double négation*. Un tel séquent a la démonstration

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\Gamma, \neg(A \vee \neg A) \vdash \neg(A \vee \neg A)}\text{ axiome} \quad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\Gamma, \neg(A \vee \neg A), A \vdash \neg(A \vee \neg A)}\text{ axiome} \quad \dfrac{\dfrac{}{\Gamma, \neg(A \vee \neg A), A \vdash A}\text{ axiome}}{\Gamma, \neg(A \vee \neg A), A \vdash A \vee \neg A}\text{ }\vee\text{-intro}}{\Gamma, \neg(A \vee \neg A), A \vdash \bot}\text{ }\neg\text{-élim}}{\Gamma, \neg(A \vee \neg A) \vdash \neg A}\text{ }\neg\text{-intro}}{\Gamma, \neg(A \vee \neg A) \vdash A \vee \neg A}\text{ }\vee\text{-intro}}{\Gamma, \neg(A \vee \neg A) \vdash \bot}\text{ }\neg\text{-élim}}{\Gamma \vdash \neg\neg(A \vee \neg A)}\text{ }\neg\text{-intro}}{\Gamma \vdash A \vee \neg A}\text{ double négation}$$

1.6.2 Les séquents à plusieurs conclusions

De manière plus surprenante, il est aussi possible d'exprimer ce principe du tiers exclu, non par une règle spéciale, mais en changeant la forme des séquents et en considérant des séquents qui ont, non seulement plusieurs hypothèses, mais aussi plusieurs conclusions.

Cela peut se comprendre en analysant la démonstration ci-avant. Dans le cas où le contexte Γ est vide et où la proposition A est juste un symbole de prédicat d'arité nulle, on cherche à démontrer le séquent $\vdash A \vee \neg A$. Si on utilise la règle $\vee$-intro, on est ramené au séquent $\vdash A$ ou au séquent $\vdash \neg A$ et aucun de ces séquents n'est démontrable. La règle $\vee$-intro remplace donc la conclusion