Exercice 1.18

Cet exercice demande d'avoir fait les exercices 1.11, 1.13, 1.14, 1.16 et 1.17.

Soit *succ* la classe binaire fonctionnelle définie par compréhension par $x, y \epsilon_2 \mathit{succ} \Leftrightarrow \mathit{Succ}[x, y]$. L'axiome de l'infini exprime l'existence d'un ensemble qui contient 0 et qui est clos par la classe binaire fonctionnelle *succ*. On veut montrer, dans cet exercice, qu'une conséquence de cet axiome est que, si a est un ensemble quelconque et r une classe binaire fonctionnelle quelconque, alors il existe un ensemble qui contient a et qui est clos par r.

On veut donc montrer la proposition

$$\forall a \forall r \ (\mathit{fonctionnelle}[r] \Rightarrow \exists E \ (a \in E \wedge \forall y \forall y' \ ((y \in E \wedge y, y' \ \epsilon_2 \ r) \Rightarrow y' \in E)))$$

Pour cela, on pose l'hypothèse *fonctionnelle*$[r]$ et on cherche à montrer la proposition $\exists E \ (a \in E \wedge \forall y \forall y' \ ((y \in E \wedge y, y' \ \epsilon_2 \ r) \Rightarrow y' \in E)))$.

Soit A la proposition

$n \in \mathbb{N} \wedge \forall g \ (((\forall p \ (\mathit{Vide}[p] \Rightarrow (p, a) \in g))$
$\wedge \forall p \forall p' \forall y \forall y' \ ((p \in n \wedge (p, y) \in g \wedge \mathit{Succ}[p, p'] \wedge y, y' \ \epsilon_2 \ r) \Rightarrow (p', y') \in g))$
$\Rightarrow (n, x) \in g)$

On écrit $A[t, u]$ la proposition $(t/n, u/x)A$

1. Démontrer les propositions

$$\forall n \ (\mathit{Vide}[n] \Rightarrow A[n, a])$$

$$\forall n \forall n' \forall x \forall x' \ ((A[n, x] \wedge \mathit{Succ}[n, n'] \wedge x, x' \ \epsilon_2 \ r) \Rightarrow A[n', x'])$$

2. On veut maintenant démontrer la proposition

$$\forall n \forall x \forall y \ ((A[n, x] \wedge A[n, y]) \Rightarrow x = y)$$

Dans un premier temps, on suppose

$$\forall p \forall x \forall y \ ((p \in n \wedge A[p, x] \wedge A[p, y]) \Rightarrow x = y)$$

et on démontre

$$\forall x \forall y \ ((A[n, x] \wedge A[n, y]) \Rightarrow x = y)$$

Soit r' la classe binaire définie en compréhension par
$p, c \ \epsilon_2 \ r' \Leftrightarrow \exists y \ (c = (p, y)$
$\wedge((\mathit{Vide}[p] \wedge y = a) \vee \exists m \exists w \ (m \in n \wedge A[m, w] \wedge \mathit{Succ}[m, p] \wedge w, y \ \epsilon_2 \ r)))$

Montrer que la classe binaire r' est fonctionnelle. Soit G l'image du successeur de n par la classe binaire r', construite avec l'axiome de remplacement. Démontrer la proposition $\forall p \forall x \ ((p, x) \in G \Rightarrow A[p, x])$.