En théorie des ensembles, le couple (a, b) est l'ensemble qui contient les éléments $\{a\}$ et $\{a, b\}$. Écrire une proposition utilisant uniquement les symboles $=$ et $\in$ qui exprime que le couple formé des éléments x et y est égal à z. Écrire une proposition qui exprime que le couple formé des éléments x et y est un élément de z.

Exercice 1.15 (La réunion de deux ensembles)

Cet exercice demande d'avoir fait l'exercice 1.13.

Montrer que la proposition

$$\forall x \forall y \exists z \forall w \ (w \in z \Leftrightarrow (w \in x \vee w \in y))$$

est démontrable dans ZF.

Exercice 1.16

Cet exercice demande d'avoir fait les exercices 1.12 et 1.15.

Montrer que les propositions suivantes sont démontrables.

$$\exists x \ \mathit{Vide}[x]$$

$$\forall x \exists y \ \mathit{Succ}[x, y]$$

$$\forall x \forall y \ ((\mathit{Vide}[x] \wedge \mathit{Vide}[y]) \Rightarrow x = y)$$

$$\forall x \forall y \forall y' \ ((\mathit{Succ}[x, y] \wedge \mathit{Succ}[x, y']) \Rightarrow y = y')$$

$$\forall x \forall y \ \neg(\mathit{Succ}[x, y] \wedge \mathit{Vide}[y])$$

Exercice 1.17 (Les entiers de Von Neumann)

Cet exercice demande d'avoir fait les exercices 1.11 et 1.16.

En théorie des ensembles, les entiers sont les ensembles suivants $0 = \varnothing, 1 = \{0\}, 2 = \{0, 1\}, 3 = \{0, 1, 2\}, \ldots$ Un ensemble est donc un entier s'il appartient à tous les ensembles qui contiennent 0 et qui sont clos par successeur. Écrire une proposition N contenant une variable libre x et utilisant uniquement les symboles $=$ et $\in$ qui exprime que x est un entier. On écrit $N[t]$ la proposition $(t/x)N$. On peut remarquer que tous les entiers appartiennent à l'ensemble I dont l'axiome de l'infini énonce l'existence. Démontrer la proposition

$$\exists \mathbb{N} \ (x \in \mathbb{N} \Leftrightarrow N[x])$$

Écrire une proposition qui exprime le principe de récurrence : si un ensemble contient 0 et est clos par successeur, alors il contient tous les entiers. Montrer que cette proposition est démontrable dans ZF.