$$\forall x_1 \ldots \forall x_m \ ((\forall y \forall z \forall z' \ ((A[y,z] \wedge A[y,z']) \Rightarrow z = z')) \Rightarrow \\ \forall a \exists b \forall z \ (z \in b \Leftrightarrow \exists y \ (y \in a \wedge A[y,z])))$$

est démontrable dans $ZF$.

## Exercice 1.11 (Le schéma de séparation)

Cet exercice demande d'avoir fait les exercices 1.5 et 1.10.

Soit $A$ une proposition ne contenant pas le symbole $\epsilon_2$ et dont les variables libres sont parmi $x_1, \ldots, x_n, y$. On écrit $A[t]$ la proposition $(t/y)A$. Montrer que la proposition

$$\forall x_1 \ldots \forall x_n \forall a \exists b \forall y \ (y \in b \Leftrightarrow (y \in a \wedge A[y]))$$

est démontrable dans $ZF$.

## Exercice 1.12 (Le théorème de l'ensemble vide)

Cet exercice demande d'avoir fait l'exercice 1.11.

Montrer que la proposition

$$\exists b \ \mathit{Vide}[b]$$

est démontrable dans $ZF$.

## Exercice 1.13 (Le théorème de la paire)

Cet exercice demande d'avoir fait l'exercice 1.10.

Soit $Un$ la proposition $\forall y \ (y \in x \Leftrightarrow \mathit{Vide}[y])$. On écrit $Un[t]$ la proposition $(t/x)Un$. Intuitivement, cela signifie que $t = \{\varnothing\}$. Soit $\mathit{Deux}$ la proposition $\forall y \ (y \in x \Leftrightarrow (\mathit{Vide}[y] \vee Un[y]))$. On écrit $\mathit{Deux}[t]$ la proposition $(t/x)\mathit{Deux}$. Intuitivement, cela signifie que $t = \{\varnothing, \{\varnothing\}\}$.

Montrer que les propositions $\exists x \ \mathit{Vide}[x]$, $\exists x \ Un[x]$, $\exists x \ \mathit{Deux}[x]$ et $\forall x \ \neg(\mathit{Vide}[x] \wedge Un[x])$ sont démontrables dans $ZF$.

Montrer que la proposition

$$\forall x \forall y \exists z \forall w \ (w \in z \Leftrightarrow (w = x \vee w = y))$$

est démontrable dans $ZF$.

## Exercice 1.14 (Les couples)

Cet exercice demande d'avoir fait l'exercice 1.13.