Définition 1.36 (ZF : La théorie des ensembles de Zermelo-Fraenkel)

Le langage de la théorie des ensembles de Zermelo-Fraenkel contient deux sortes de termes ι et σ, un symbole de prédicat ϵ_2 d'arité (ι, ι, σ), un symbole de prédicat $=$ d'arité (ι, ι) et un symbole de prédicat $\in$ d'arité (ι, ι) pour l'appartenance d'un ensemble à un autre. Outre les axiomes de l'égalité et le schéma de compréhension binaire, la théorie des ensembles de Zermelo-Fraenkel contient les axiomes suivants.
L'*axiome d'extensionalité*, qui énonce que deux ensembles sont égaux quand ils ont les mêmes éléments

$$\forall x \forall y \ ((\forall z \ (z \in x \Leftrightarrow z \in y)) \Rightarrow x = y)$$

L'*axiome de la réunion*, qui énonce que, quand on a construit un ensemble x qui contient des éléments $v_0, v_1, \ldots$, on peut construire la réunion des ensembles $v_0, v_1, \ldots$

$$\forall x \exists z \forall w \ (w \in z \Leftrightarrow (\exists v \ (w \in v \wedge v \in x)))$$

L'*axiome des parties*, qui énonce que quand on a construit un ensemble x on peut construire un ensemble qui contient les parties de x

$$\forall x \exists z \forall w \ (w \in z \Leftrightarrow (\forall v \ (v \in w \Rightarrow v \in x)))$$

L'*axiome de l'infini*, qui énonce que l'on peut construire un ensemble infini. Soit *Vide* la proposition $\forall y \ (\neg(y \in x))$. On écrit $\mathit{Vide}[t]$ la proposition $(t/x)\,\mathit{Vide}$. Soit *Succ* la proposition $\forall z \ (z \in y \Leftrightarrow (z \in x \vee z = x))$. On écrit $\mathit{Succ}[t, u]$ la proposition $(t/x, u/y)\mathit{Succ}$. Intuitivement, cela signifie que u est l'ensemble $t \cup \{t\}$. L'axiome de l'infini est

$$\exists I \ (\forall x \ (\mathit{Vide}[x] \Rightarrow x \in I) \wedge \forall x \forall y \ ((x \in I \wedge \mathit{Succ}[x, y]) \Rightarrow y \in I))$$

L'*axiome de remplacement* qui énonce que quand on a construit un ensemble a et une classe binaire fonctionnelle r, on peut construire l'ensemble des objets reliés à un élément de a par la classe binaire r. Soit *fonctionnelle* la proposition $\forall y \forall z \forall z' \ ((y, z \ \epsilon_2 \ r \wedge y, z' \ \epsilon_2 \ r) \Rightarrow z = z')$. On écrit $\mathit{fonctionnelle}[t]$ la proposition $(t/r)\mathit{fonctionnelle}$. L'axiome de remplacement est

$$\forall r \ (\mathit{fonctionnelle}[r] \Rightarrow \forall a \exists b \forall z \ (z \in b \Leftrightarrow \exists y \ (y \in a \wedge y, z \ \epsilon_2 \ r)))$$

Exercice 1.10 (Le schéma de remplacement)

Cet exercice demande d'avoir fait l'exercice 1.5.

Soit A une proposition ne contenant pas le symbole ϵ_2 et dont les variables libres sont parmi $x_1, \ldots, x_n, y, z$. On écrit $A[t, u]$ la proposition $(t/y, u/z)A$. Montrer que la proposition