$$\forall x \forall y \ (S(x) + y = S(x + y))$$
$$\forall y \ (0 \times y = 0)$$
$$\forall x \forall y \ (S(x) \times y = (x \times y) + y)$$

Exercice 1.8 (Le schéma de récurrence)

Cet exercice demande d'avoir fait l'exercice 1.5.

Montrer que pour chaque proposition A de l'arithmétique, ne contenant pas le symbole ϵ et dont les variables libres sont parmi $x_1, \ldots, x_n, y$, la proposition

$$\forall x_1 \ldots \forall x_n \ ((0/y)A \Rightarrow \forall m \ ((m/y)A \Rightarrow (S(m)/y)A) \Rightarrow \forall n \ (n/y)A)$$

est démontrable dans l'arithmétique.

Définition 1.34 (La théorie naïve des ensembles)

Le langage de la théorie naïve des ensembles contient une sorte et un symbole de prédicat binaire $\in$. Elle contient pour chaque proposition A dont les variables libres sont parmi $x_1, \ldots, x_n, y$, un axiome de la forme

$$\forall x_1 \ldots \forall x_n \exists a \forall y \ (y \in a \Leftrightarrow A)$$

Exercice 1.9 (Le paradoxe de Russell)

Montrer que le séquent

$$\forall y \ (y \in a \Leftrightarrow \neg y \in y) \vdash \bot$$

est démontrable. En déduire que la théorie naïve des ensembles est contradictoire. Pourquoi ce paradoxe ne s'applique-t-il pas à la théorie des classes ?

Définition 1.35 (La théorie des classes binaires)

Soit un langage à deux sortes de termes ι pour les objets et σ pour les classes binaires, contenant un nombre arbitraire de symboles de fonction d'arité $(\iota, \ldots, \iota, \iota)$ et de symboles de prédicat d'arité $(\iota, \ldots, \iota)$ ainsi qu'un symbole de prédicat ϵ_2 d'arité (ι, ι, σ).

La théorie des classes binaires pour ce langage contient, pour chaque proposition A ne contenant pas le symbole ϵ_2 et dont les variables libres sont parmi $x_1, \ldots, x_n, y, z$ un axiome de la forme

$$\forall x_1 \ldots \forall x_n \exists r \forall y \forall z \ (y, z \ \epsilon_2 \ r \Leftrightarrow A)$$

Cet ensemble d'axiomes s'appelle le *schéma de compréhension binaire*.