Pour chaque symbole de prédicat P d'arité $(s_1, \ldots, s_n)$ et chaque entier i tel que la sorte s_i ait un symbole d'égalité de l'axiome

$$\forall x_1 \ldots \forall x_i \forall x_i' \forall x_n \ (x_i =_{s_i} x_i' \Rightarrow (P(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_n) \Rightarrow P(x_1, \ldots, x_i', \ldots, x_n)))$$

Exercice 1.7

Donner une démonstration, dans la théorie de l'égalité, des propositions

$$\forall_s x \forall_s y \forall_s z \ (x =_s y \Rightarrow (y =_s z \Rightarrow x =_s z))$$

$$\forall_s x \forall_s y \ (x =_s y \Rightarrow y =_s x)$$

Définition 1.32 (La théorie des classes)

Soit un langage à deux sortes de termes : ι pour les objets et κ pour les classes d'objets, contenant un nombre arbitraire de symboles de fonction d'arité $(\iota, \ldots, \iota, \iota)$ et de symboles de prédicat d'arité $(\iota, \ldots, \iota)$, ainsi qu'un symbole de prédicat ϵ d'arité (ι, κ).

La *théorie des classes* pour ce langage contient, pour chaque proposition A ne contenant pas le symbole ϵ et dont les variables libres sont parmi $x_1, \ldots, x_n, y$, l'axiome

$$\forall x_1 \ldots \forall x_n \exists c \forall y \ (y \ \epsilon \ c \Leftrightarrow A)$$

Cet ensemble d'axiomes s'appelle le *schéma de compréhension*.

Définition 1.33 (L'arithmétique)

Le langage de l'arithmétique contient deux sortes de termes ι et κ, une constante 0 de sorte ι, des symboles de fonction S, *successeur*, d'arité (ι, ι), $+$ et $\times$ d'arité (ι, ι, ι) et des symboles de prédicat ϵ d'arité (ι, κ) et $=$ d'arité (ι, ι). Aux axiomes de l'égalité et au schéma de compréhension, on ajoute les axiomes du successeur

$$\forall x \forall y \ (S(x) = S(y) \Rightarrow x = y)$$

$$\forall x \ \neg(0 = S(x))$$

l'axiome de récurrence

$$\forall c \ (0 \ \epsilon \ c \Rightarrow \forall x \ (x \ \epsilon \ c \Rightarrow S(x) \ \epsilon \ c) \Rightarrow \forall y \ y \ \epsilon \ c)$$

et les axiomes de l'addition et de la multiplication

$$\forall y \ (0 + y = y)$$