on associe un symbole de fonction f' d'arité n et à chaque symbole de prédicat P d'arité $(s_1, \ldots, s_n)$, on associe un symbole de prédicat P' d'arité n. Pour chaque sorte s, on introduit un symbole de prédicat unaire S_s. On traduit alors les termes et les propositions de la manière suivante

- $|x| = x$,
- $|f(t_1, \ldots, t_n)| = f'(|t_1|, \ldots, |t_n|)$,
- $|P(t_1, \ldots, t_n)| = P'(|t_1|, \ldots, |t_n|)$,
- $|\top| = \top$,
- $|\bot| = \bot$,
- $|\neg A| = \neg|A|$,
- $|A \wedge B| = |A| \wedge |B|$, $|A \vee B| = |A| \vee |B|$, $|A \Rightarrow B| = |A| \Rightarrow |B|$,
- $|\forall_s x\ A| = \forall x\ (S_s(x) \Rightarrow |A|)$, $|\exists_s x\ A| = \exists x\ (S_s(x) \wedge |A|)$.

On traduit une théorie en traduisant chaque axiome et en ajoutant pour chaque sorte s l'axiome

$$\exists x\ S_s(x)$$

et pour chaque symbole de fonction f d'arité $(s_1, \ldots, s_n, s')$ l'axiome

$$\forall x_1 \ldots \forall x_n\ ((S_{s_1}(x_1) \wedge \ldots \wedge S_{s_n}(x_n)) \Rightarrow (S_{s'}(f'(x_1, \ldots, x_n))))$$

Soit $\mathcal{T}'$ la théorie formée pour chaque variable de sorte s de l'axiome $S_s(x)$. Montrer que si le terme t a la sorte s, alors la proposition $S_s(|t|)$ est démontrable dans la théorie $|\mathcal{T}|, \mathcal{T}'$.

Montrer que si la proposition A est démontrable dans la théorie $\mathcal{T}$, alors la proposition $|A|$ est démontrable dans la théorie $|\mathcal{T}|, \mathcal{T}'$.

Montrer que si la proposition close A est démontrable dans la théorie $\mathcal{T}$, alors la proposition $|A|$ est démontrable dans la théorie $|\mathcal{T}|$.

1.5 Des exemples de théories

Définition 1.31 (Les axiomes de l'égalité)

Soit un langage contenant des prédicats $=_s$ de sorte (s, s) pour certaines sortes s. Les *axiomes de l'égalité* pour ce langage sont les suivants. Pour chaque sorte s ayant un symbole d'égalité, l'axiome d'identité

$$\forall_s x\ (x =_s x)$$

Pour chaque symbole de fonction f d'arité $(s_1, \ldots, s_n, s')$ telle que la sorte s' ait un symbole d'égalité et chaque entier i tel que la sorte s_i ait un symbole d'égalité de l'axiome

$$\forall x_1 \ldots \forall x_i \forall x'_i \ldots \forall x_n\ (x_i =_{s_i} x'_i \Rightarrow f(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_n) =_{s'} f(x_1, \ldots, x'_i, \ldots, x_n))$$