Démonstration. Si la théorie est contradictoire, elle démontre toutes les propositions, donc, en particulier, la proposition $\bot$. Réciproquement, si une théorie démontre la proposition $\bot$, alors il existe un sous-ensemble fini Γ de $\mathcal{T}$ tel que le séquent $\Gamma \vdash \bot$ ait une démonstration π. Soit A une proposition quelconque. Le séquent $\Gamma \vdash A$ a la démonstration

$$\dfrac{\dfrac{\pi}{\Gamma \vdash \bot}}{\Gamma \vdash A}\ \bot\text{-élim}$$

et la proposition A est donc démontrable dans la théorie $\mathcal{T}$.

Proposition 1.10

Une théorie $\mathcal{T}$ est contradictoire si et seulement s'il existe une proposition A telle que la théorie démontre A et $\neg A$.

Démonstration. Si la théorie est contradictoire elle démontre toutes les propositions, donc, en particulier, les propositions $\top$ et $\neg\top$.

Réciproquement, si une théorie démontre les propositions A et $\neg A$, alors il existe deux sous-ensembles finis Γ et Γ' tels que les séquents $\Gamma \vdash A$ et $\Gamma' \vdash \neg A$ soient démontrables. D'après la proposition 1.6, les séquents $\Gamma, \Gamma' \vdash A$ et $\Gamma, \Gamma' \vdash \neg A$ ont des démonstrations π_1 et π_2. Le séquent $\Gamma, \Gamma' \vdash \bot$ a alors la démonstration

$$\dfrac{\dfrac{\pi_2}{\Gamma, \Gamma' \vdash \neg A} \quad \dfrac{\pi_1}{\Gamma, \Gamma' \vdash A}}{\Gamma, \Gamma' \vdash \bot}\ \neg\text{-élim}$$

La proposition $\bot$ est donc démontrable dans la théorie $\mathcal{T}$ et, d'après la proposition 1.9, la théorie $\mathcal{T}$ est contradictoire.

Exercice 1.5

Montrer que si le séquent $\Gamma \vdash A \Leftrightarrow A'$ est démontrable, alors les séquents $\Gamma \vdash (A \wedge B) \Leftrightarrow (A' \wedge B)$, $\Gamma \vdash (B \wedge A) \Leftrightarrow (B \wedge A')$, $\Gamma \vdash (A \vee B) \Leftrightarrow (A' \vee B)$, $\Gamma \vdash (B \vee A) \Leftrightarrow (B \vee A')$, $\Gamma \vdash (A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (A' \Rightarrow B)$, $\Gamma \vdash (B \Rightarrow A) \Leftrightarrow (B \Rightarrow A')$, $\Gamma \vdash (\neg A) \Leftrightarrow (\neg A')$, $\Gamma \vdash (\forall x\ A) \Leftrightarrow (\forall x\ A')$ et $\Gamma \vdash (\exists x\ A) \Leftrightarrow (\exists x\ A')$ sont démontrables.

Exercice 1.6

Une théorie à plusieurs sortes de termes peut se *relativiser* en une théorie à une seule sorte de termes. À chaque symbole de fonction f d'arité $(s_1, \ldots, s_n, s')$,