Proposition 1.8

Le séquent $\vdash \neg\exists x \neg A \Rightarrow \forall x A$ est démontrable.

Démonstration. Ce séquent a la démonstration

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\neg\exists x\neg A \vdash A \vee \neg A}\,\text{tiers exclu} \quad \dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\neg\exists x\neg A, \neg A \vdash \neg\exists x\ \neg A}\,\text{axiome} \quad \dfrac{\dfrac{}{\neg\exists x\neg A, \neg A \vdash \neg A}\,\text{axiome}}{\neg\exists x\neg A, \neg A \vdash \exists x\ \neg A}\,\exists\text{-intro}}{\neg\exists x\neg A, \neg A \vdash \bot}\,\neg\text{-élim}}{\neg\exists x\neg A, \neg A \vdash A}\,\bot\text{-élim}}{\neg\exists x\neg A, A \vdash A}\,\text{axiome}}{\neg\exists x\neg A \vdash A}\,\vee\text{-élim}}{\neg\exists x\neg A \vdash \forall x\ A}\,\forall\text{-intro}}{\vdash \neg\exists x\neg A \Rightarrow \forall x\ A}\,\Rightarrow\text{-intro}$$

Définition 1.28 (Théorie)

Une *théorie* est un ensemble fini ou infini de propositions closes dont les éléments sont appelés *axiomes*.

Quand une théorie $\mathcal{T}$ est finie, on dit qu'une proposition A est un *théorème de cette théorie*, ou encore qu'elle est *démontrable dans cette théorie*, si le séquent $\mathcal{T} \vdash A$ est démontrable. Cependant, dans le cas général, le couple $\mathcal{T} \vdash A$ n'est pas un séquent. On doit donc donner une définition un peu plus générale.

Définition 1.29 (Théorème)

Une proposition A est un *théorème de la théorie* $\mathcal{T}$, ou une *proposition démontrable dans cette théorie*, s'il existe un sous-ensemble fini Γ de $\mathcal{T}$, tel que le séquent $\Gamma \vdash A$ soit démontrable.

Définition 1.30 (Cohérence, contradiction)

Une théorie $\mathcal{T}$ est *cohérente* s'il existe une proposition qui n'est pas démontrable dans $\mathcal{T}$. Elle est dite *contradictoire* sinon.

Proposition 1.9

Une théorie est contradictoire si et seulement si elle démontre la proposition $\bot$.