et A la proposition qui exprime que si deux médiatrices du triangle xyz sont concourantes, alors ses trois médiatrices le sont

$$\forall w \forall x \forall y \forall z\ ((w \in m(x,y) \wedge w \in m(y,z)) \Rightarrow w \in m(x,z))$$

Donner une démonstration du séquent $\Gamma \vdash A$.

La proposition suivante montre que, dans un séquent, on peut ajouter des hypothèses inutiles.

Proposition 1.6 (L'affaiblissement)

Si le séquent $\Gamma \vdash A$ est démontrable, alors le séquent $\Gamma, B \vdash A$ est démontrable.

Démonstration. Par récurrence sur la structure d'une démonstration de $\Gamma \vdash A$.

Proposition 1.7 (La double négation)

Les trois propositions sont équivalentes.

1. Le séquent $\Gamma \vdash A$ est démontrable.
2. Le séquent $\Gamma, \neg A \vdash \bot$ est démontrable.
3. Le séquent $\Gamma \vdash \neg\neg A$ est démontrable.

Démonstration.

(1.) $\Rightarrow$ (2.) Si le séquent $\Gamma \vdash A$ est démontrable, alors, d'après la proposition 1.6, le séquent $\Gamma, \neg A \vdash A$ également. Le séquent $\Gamma, \neg A \vdash \neg A$ est démontrable avec la règle *axiome* et donc le séquent $\Gamma, \neg A \vdash \bot$ avec la règle $\neg$-élim.

(2.) $\Rightarrow$ (3.) Si le séquent $\Gamma, \neg A \vdash \bot$ est démontrable, alors le séquent $\Gamma \vdash \neg\neg A$ est démontrable avec la règle $\neg$-intro.

(3.) $\Rightarrow$ (2.) Si le séquent $\Gamma \vdash \neg\neg A$ est démontrable, alors, d'après la proposition 1.6, le séquent $\Gamma, \neg A \vdash \neg\neg A$ également. Le séquent $\Gamma, \neg A \vdash \neg A$ est démontrable avec la règle *axiome* et donc le séquent $\Gamma, \neg A \vdash \bot$ avec la règle $\neg$-élim.

(2.) $\Rightarrow$ (1.) Si le séquent $\Gamma, \neg A \vdash \bot$ a une démonstration π, alors le séquent $\Gamma \vdash A$ a la démonstration

$$\dfrac{\dfrac{}{\Gamma \vdash A \vee \neg A}\text{ tiers exclu} \quad \dfrac{}{\Gamma, A \vdash A}\text{ axiome} \quad \dfrac{\dfrac{\pi}{\Gamma, \neg A \vdash \bot}}{\Gamma, \neg A \vdash A}\ \bot\text{-élim}}{\Gamma \vdash A}\ \vee\text{-élim}$$