$$\frac{\Gamma \vdash (t/x)A}{\Gamma \vdash \exists x\ A}\ \exists\text{-intro}$$

$$\frac{\Gamma \vdash \exists x\ A \quad \Gamma, A \vdash B}{\Gamma \vdash B}\ \exists\text{-élim } x \text{ non libre dans } \Gamma, B$$

$$\frac{}{\Gamma \vdash A \vee \neg A}\ \text{tiers exclu}$$

Les règles $\top$-intro, $\wedge$-intro, $\vee$-intro, $\Rightarrow$-intro, $\neg$-intro, $\forall$-intro et $\exists$-intro sont appelées des *règles d'introduction* et les règles $\perp$-élim, $\wedge$-élim, $\vee$-élim, $\Rightarrow$-élim, $\neg$-élim, $\forall$-élim et $\exists$-élim des *règles d'élimination*. Les règles de la déduction naturelle sont donc classées en quatre groupes : les règles d'introduction, les règles d'élimination, la règle *axiome* et la règle *tiers exclu*.

Définition 1.26 (Séquent démontrable)

L'*ensemble des séquents démontrables* est inductivement défini par les règles de la déduction naturelle.

Définition 1.27 (Démonstration)

Une *démonstration* d'un séquent $\Gamma \vdash A$ est une dérivation de ce séquent, c'est-à-dire un arbre dont les nœuds sont étiquetés par des séquents dont la racine est étiquetée par $\Gamma \vdash A$, et tel que si un nœud est étiqueté par un séquent $\Delta \vdash B$, alors ses enfants sont étiquetés par des séquents $\Sigma_1 \vdash C_1, \ldots, \Sigma_n \vdash C_n$ tels qu'il existe une règle de déduction naturelle, qui permet de déduire $\Delta \vdash B$ de $\Sigma_1 \vdash C_1, \ldots, \Sigma_n \vdash C_n$.

Un séquent $\Gamma \vdash A$ est donc démontrable s'il existe une démonstration de ce séquent.

Exercice 1.4

On considère un langage à trois sortes de termes : *point*, *droite* et *scalaire* formé de deux symboles de prédicat $=$ d'arité (*scalaire*, *scalaire*) et $\in$ d'arité (*point*, *droite*) et de deux symboles de fonction d, *distance*, d'arité (*point*, *point*, *scalaire*) et m, *médiatrice*, d'arité (*point*, *point*, *droite*). Soient Γ l'ensemble contenant les propositions

$$\forall x \forall y \forall z\ (x \in m(y,z) \Leftrightarrow d(x,y) = d(x,z))$$

et

$$\forall x \forall y \forall z\ ((x = y \wedge y = z) \Rightarrow x = z)$$