2. Quels symboles sont des symboles de fonction, quels symboles sont des symboles de prédicat ?
3. Quelle est l'arité de chaque symbole ?

1.4 Les démonstrations

Nous voulons maintenant distinguer une proposition, comme $\exists x\ (x = 0+1)$, qui est démontrable, d'une proposition qui ne l'est pas, comme $\exists x\ (0 = x+1)$.

Une manière de le faire est de se donner un ensemble de règles et de définir inductivement, à l'aide de ces règles, un sous-ensemble de l'ensemble des propositions : l'ensemble des *théorèmes* ou *propositions démontrables*.

Exercice 1.3

Soit le langage à une sorte de termes formé des symboles de fonction 0, d'arité nulle, et S, *successeur*, d'arité 1, et du symbole de prédicat $\leq$, d'arité 2. On se donne les règles suivantes

$$\frac{\forall x\ A}{(t/x)A}$$

$$\frac{A \Rightarrow B\ \ A}{B}$$

$$\frac{A\ \ B}{A \wedge B}$$

$$\overline{\forall x \forall y \forall z\ ((x \leq y \wedge y \leq z) \Rightarrow x \leq z)}$$

$$\overline{\forall x\ (x \leq S(x))}$$

montrer que la proposition

$$0 \leq S(S(0))$$

est démontrable.

Une telle définition de la notion de démonstration est possible, on parle alors de *démonstration à la Frege et Hilbert*, mais elle est difficile à utiliser. En effet, en posant ainsi des règles qui permettent de démontrer des propositions, on se contraint à garder les mêmes hypothèses tout au long de la démonstration. On ne peut donc pas traduire une forme de raisonnement pourtant courante : nous voulons démontrer $A \Rightarrow B$, supposons A et démontrons B sous cette hypothèse. Cette remarque mène à introduire une notion de couple formé d'un ensemble fini d'hypothèses et d'une conclusion. Un tel couple est appelé un *séquent*.