Définition 1.22 (Terme)

Soit $\mathcal{L} = (\mathcal{S}, \mathcal{F}, \mathcal{P})$ un langage et $(\mathcal{V}_s)_{s\in\mathcal{S}}$ une famille d'ensembles infinis et disjoints indexée par les sortes de termes dont les éléments sont appelés *variables*. Les *termes* de sorte s du langage $\mathcal{L}$, pour la famille d'ensembles de variables $(\mathcal{V}_s)_{s\in\mathcal{S}}$, sont inductivement définis par les règles suivantes.

- Les variables de sorte s sont des termes de sorte s.
- Si f est un symbole d'arité $(s_1, \ldots, s_n, s')$ et t_1, …, t_n des termes de sortes s_1, …, s_n, alors $f(t_1, \ldots, t_n)$ est un terme de sorte s'.

Définition 1.23 (Proposition)

Soit $\mathcal{L} = (\mathcal{S}, \mathcal{F}, \mathcal{P})$ un langage et $(\mathcal{V}_s)_{s\in\mathcal{S}}$ une famille d'ensembles infinis et disjoints indexée par les sortes de termes dont les éléments sont appelés *variables*. Les *propositions* du langage $\mathcal{L}$, pour la famille d'ensembles de variables $(\mathcal{V}_s)_{s\in\mathcal{S}}$, sont inductivement définies par les règles suivantes.

- Si P est un symbole de prédicat d'arité $(s_1, \ldots, s_n)$ et $t_1, \ldots, t_n$ sont des termes de sorte s_1, …, s_n, alors l'expression $P(t_1, \ldots, t_n)$ est une proposition.
- $\top$ et $\bot$ sont des propositions.
- Si A est une proposition, alors $\neg A$ est une proposition.
- Si A et B sont des propositions, alors $A \wedge B$, $A \vee B$ et $A \Rightarrow B$ sont des propositions.
- Si A est une proposition et x une variable de sorte s, alors $\forall_s x\ A$ et $\exists_s x\ A$ sont des propositions.

On utilise la notation $A \Leftrightarrow B$ pour la proposition $(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A)$. Une proposition de la forme $P(t_1, \ldots, t_n)$ est appelée une *proposition atomique*.

Quand $\mathcal{S}$ est un singleton, on dit que le langage a une seule sorte de termes, et l'arité d'un symbole de fonction ou de prédicat se réduit alors à un entier : le nombre d'arguments de ce symbole.

Exercice 1.2

Soit $\mathcal{L}$ le langage à une sorte de termes formé des symboles $\mathbb{C}$, $\mathbb{N}$, 0, $=$, $\hat{}$, $\in$ et $\#$ où le symbole $\hat{}$ est la puissance et $\#$ le cardinal.

1. Écrire la proposition

   Tout nombre complexe non nul a n racines n-ièmes

   comme une proposition du langage $\mathcal{L}$.