1.3 Les langages de la logique des prédicats

La notion de langage introduite à la section précédente est très générale. Nous allons à présent nous concentrer sur le cas particulier des langages de la logique des prédicats. Dans ces langages, la plupart des symboles ne lient pas de variables. Les seules exceptions sont les quantificateurs $\forall$ et $\exists$. Par ailleurs, ces langages sont organisés autour d'une opposition entre les *termes*, qui expriment des choses, et les *propositions*, qui expriment des faits à propos de ces choses, les termes pouvant eux-mêmes avoir plusieurs sortes. Ainsi, un langage est défini par un ensemble non vide $\mathcal{S}$, dont les éléments sont appelés *sortes de termes*, un ensemble $\mathcal{F}$, dont les éléments sont appelés *symboles de fonction* et permettent de former des termes à partir d'autres termes, et un ensemble $\mathcal{P}$, dont les éléments sont appelés *symboles de prédicat* et permettent de former des propositions à partir de termes.

Les sortes du langage sont les sortes de termes plus une sorte $Prop$ pour les propositions. Comme les symboles de fonction ne lient pas de variables, leur arité est de la forme $(s_1, \ldots, s_n, s')$ où s_1, ..., s_n et s' sont des sortes de termes. Si un symbole f a une telle arité et si t_1, ..., t_n sont des termes de sorte s_1, ..., s_n, alors l'expression $f(t_1, \ldots, t_n)$ est un terme de sorte s'. De même, comme les symboles de prédicat ne lient pas de variables, leur arité est de la forme $(s_1, \ldots, s_n, Prop)$, où s_1, ..., s_n sont des sortes de termes. Cette arité est plus simplement notée $(s_1, \ldots, s_n)$. Si un symbole P a une telle arité et si t_1, ..., t_n sont des termes de sorte s_1, ..., s_n, alors l'expression $P(t_1, \ldots, t_n)$ est une proposition. À ces symboles, qui varient d'un langage à l'autre, s'ajoutent des symboles communs à tous les langages de la logique des prédicats : $\top$, *vrai*, et $\bot$, *faux*, d'arité $(Prop)$, $\neg$, *non*, d'arité $(Prop, Prop)$, $\wedge$, *et*, $\vee$, *ou*, et $\Rightarrow$, *implique*, d'arité $(Prop, Prop, Prop)$ et enfin, pour chaque élément de $\mathcal{S}$, deux quantificateurs $\forall_s$, *pour tout*, et $\exists_s$, *il existe*, d'arité $((s, Prop), Prop)$. Comme il n'y a pas de symbole permettant de lier une variable de sorte $Prop$, il n'est pas nécessaire d'introduire de telles variables.

Cela mène aux définitions suivantes.

Définition 1.21 (Langage de la logique des prédicats)

Un *langage* $\mathcal{L}$ est un triplet $(\mathcal{S}, \mathcal{F}, \mathcal{P})$ où $\mathcal{S}$ est un ensemble non vide dont les éléments sont appelés *sortes de termes* et $\mathcal{F}$ et $\mathcal{P}$ des ensembles dont les éléments sont respectivement appelés *symboles de fonction* et *symboles de prédicat*. À chaque symbole de fonction, on associe une arité qui est un $(n+1)$-uplet d'éléments de $\mathcal{S}$ et à chaque symbole de prédicat une arité qui est un n-uplet d'éléments de $\mathcal{S}$.