pressions.

On peut maintenant définir l'opération de substitution par récurrence sur la hauteur des expressions.

Définition 1.18 (Application d'une substitution)

Soit $\theta = t_1/x_1, \ldots, t_n/x_n$ une substitution et t une expression. On définit l'expression θt par récurrence sur la hauteur de t de la manière suivante

- $\theta x_i = t_i$,
- $\theta x = x$ si x n'est pas dans le domaine de θ,
- $\theta f(y_1^1 \ldots y_{k_1}^1 u_1, \ldots, y_1^p \ldots y_{k_p}^p u_p) =$
  $f(z_1^1 \ldots z_{k_1}^1 \theta\langle z_1^1/y_1^1, \ldots, z_{k_1}^1/y_{k_1}^1\rangle u_1, \ldots, z_1^p \ldots z_{k_p}^p \theta\langle z_1^p/y_1^p, \ldots, z_{k_p}^p/y_{k_p}^p\rangle u_p)$
  où $z_1^1, \ldots, z_{k_1}^1, \ldots, z_1^p, \ldots, z_{k_p}^p$ sont des variables qui n'apparaissent pas dans $f(y_1^1 \ldots y_{k_1}^1\ u_1, \ldots, y_1^p \ldots y_{k_p}^p\ u_p)$ ni dans θ.

Par exemple, quand on substitue la variable y par l'expression $2 \times x$ dans l'expression $\exists x\ (x + 1 = y)$, on obtient l'expression $\exists z\ (z + 1 = 2 \times x)$. Le choix de la variable z est arbitraire, on aurait pu tout aussi bien choisir v ou w, ce qui aurait donné la même expression, à α-équivalence près.

Définition 1.19 (Composition de deux substitutions)

La *composition* de deux substitutions $\theta = t_1/x_1, \ldots, t_n/x_n$ et $\sigma = u_1/y_1, \ldots, u_p/y_p$ est la substitution

$$\theta \circ \sigma = \{\theta(\sigma z)/z | z \in \{x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_p\}\}$$

On démontre, par récurrence sur la hauteur de t, que pour toute expression t

$$(\theta \circ \sigma)t = \theta(\sigma t)$$

1.2.5 L'articulation

Dans les définitions ci-avant, nous n'avons donné aucune restriction sur le nombre de symboles d'un langage. Il faut cependant prendre en compte le fait que, *in fine*, les expressions d'un langage doivent s'écrire avec un alphabet fini. Si chaque symbole du langage est exprimé par une lettre de cet alphabet, cela impose que l'ensemble des symboles du langage soit fini. Toutefois, il est également possible d'exprimer ces symboles par des mots formés sur un alphabet fini, ou plus généralement par des arbres étiquetés par les éléments d'un ensemble fini. Ainsi, en géométrie, certains symboles, comme π, sont des lettres,