$$= f(y_1^1 \dots y_{k_1}^1\ \langle \theta_{|(\mathcal{V} \setminus \{y_1^1,\dots,y_{k_1}^1\})} \rangle u_1, \dots, y_1^p \dots y_{k_p}^p\ \langle \theta_{|(\mathcal{V} \setminus \{y_1^p,\dots,y_{k_p}^p\})} \rangle u_p)$$

où la notation $\theta_{|\mathcal{V}\setminus\{y_1,\dots,y_k\}}$ désigne la substitution θ restreinte à l'ensemble $\mathcal{V} \setminus \{y_1, \dots, y_k\}$, c'est-à-dire dans laquelle on a supprimé les couples dont la première composante est l'une des variables $y_1, \dots, y_k$.

Cette définition pose néanmoins un problème, car elle autorise les *captures de variables*. Par exemple, l'expression $\exists x\ (x + 1 = y)$ exprime que y est le successeur d'un certain nombre. Si on substitue y par 4 dans cette expression, on obtient l'expression $\exists x\ (x+1 = 4)$, qui exprime que 4 est le successeur d'un certain nombre. Si on substitue y par z, on obtient l'expression $\exists x\ (x+1 = z)$, qui exprime que z est le successeur d'un certain nombre. Mais si on substitue y par x, on obtient l'expression $\exists x\ (x + 1 = x)$, qui exprime qu'il existe un nombre qui est son propre successeur, et non, comme on s'y attendrait, que x est le successeur d'un certain nombre.

Pour éviter ce problème, il faut se rappeler que les variables liées sont muettes : leur nom n'importe pas. Autrement dit, dans l'expression $\exists x\ (x+1 = y)$, on peut remplacer la variable liée x par n'importe quelle autre variable, sauf, bien entendu, y. Ainsi, quand on substitue dans une expression u des variables $x_1, \dots, x_n$ par des expressions $t_1, \dots, t_n$, on peut changer le nom des variables liées dans u en prenant des noms qui n'apparaissent ni parmi $x_1, \dots, x_n$, ni parmi les variables de $t_1, \dots, t_n$, ni parmi les variables de u, afin d'éviter ces problèmes.

On commence donc par définir, en utilisant la notion de substitution avec capture définie ci-avant, une relation d'équivalence sur les expressions, par récurrence sur leur hauteur : la relation d'*équivalence alphabétique*, qui est le changement de nom des variables liées.

Définition 1.17 (Équivalence alphabétique)

La relation d'*équivalence alphabétique*, ou *alpha-équivalence*, est inductivement définie par les règles

- $x \sim x$,
- $f(y_1^1 \dots y_{k_1}^1\ t_1, \dots, y_1^n \dots y_{k_n}^n\ t_n) \sim f(y_1'^1 \dots y_{k_1}'^1\ t_1', \dots, y_1'^n \dots y_{k_n}'^n\ t_n')$ si pour tout i, et pour toute suite de variables distinctes $z_1, \dots, z_{k_i}$ qui n'apparaissent pas dans t_i ni dans t_i', $\langle z_1/y_1^i, \dots, z_{k_i}/y_{k_i}^i \rangle t_i \sim \langle z_1/y_1'^i, \dots, z_{k_i}/y_{k_i}'^i \rangle t_i'$.

Par exemple, les expressions $\forall x\ (x = x)$ et $\forall y\ (y = y)$ sont α-équivalentes.

Désormais on ne considère plus les expressions que *à α-équivalence près*, c'est-à-dire que l'on considère implicitement des classes d'α-équivalence d'ex-