suivante

- $Hauteur(x) = 0$,
- $Hauteur(f(x_1^1 \ldots x_{k_1}^1 t_1, \ldots, x_1^n \ldots x_{k_n}^n t_n))$
$$= 1 + max(Hauteur(t_1), \ldots, Hauteur(t_n)).$$

1.2.4 La substitution

La première opération que l'on est amené à définir avec la notion de variable est celle de substitution : le rôle des variables est, en effet, non seulement d'être liées, mais également d'être substituées. Par exemple, de la proposition $\forall x \ (impair(x) \Rightarrow pair(x+1))$, on veut pouvoir déduire la proposition $impair(3) \Rightarrow pair(3+1)$ obtenue en substituant la variable x par l'expression 3.

Définition 1.15 (Substitution)

Une *substitution* est une fonction de domaine fini qui à des variables $x_1, \ldots, x_n$ associe des expressions de même sorte, c'est-à-dire un ensemble fini de couples dont la première composante est une variable et la seconde une expression tel que chaque variable apparaisse dans un couple au plus, ou encore une liste d'associations : $\theta = t_1/x_1, \ldots, t_n/x_n$.

Quand on applique une substitution à une expression, on veut remplacer toutes les occurrences des variables x_1, ..., x_n par les expressions t_1, ..., t_n.

Bien entendu, ce remplacement ne concerne que les variables libres. Par exemple, si on substitue la variable x par l'expression 2 dans l'expression $x+3$, on veut obtenir l'expression $2+3$. En revanche, si on substitue la variable x par l'expression 2 dans l'expression $\forall x \ (x = x)$, on veut obtenir l'expression $\forall x \ (x = x)$ et non l'expression $\forall x \ (2 = 2)$.

La première tentative pour définir l'application d'une substitution à une expression mène à la définition suivante.

Définition 1.16 (Application d'une substitution — avec capture)

Soit $\theta = t_1/x_1, \ldots, t_n/x_n$ une substitution et t une expression. On définit l'expression $\langle\theta\rangle t$ par récurrence sur la structure de t de la manière suivante

- $\langle\theta\rangle x_i = t_i$,
- $\langle\theta\rangle x = x$ si x n'est pas dans le domaine de θ,
- $\langle\theta\rangle f(y_1^1 \ldots y_{k_1}^1 \ u_1, \ldots, y_1^p \ldots y_{k_p}^p \ u_p)$