1. Donner un terme de type $\rho_0 \to \rho_1 \to \rho_0$ dans le contexte vide. Et un terme de type $\rho_0 \to \rho_1 \to \rho_1$.

   La logique propositionnelle minimale est le fragment de la logique des prédicats formé des symboles de proposition $P_0, \ldots, P_n$ et de l'implication.

2. Quelles sont les règles de la déduction naturelle que l'on peut utiliser pour démontrer une proposition dans ce fragment ? Donner une démonstration de la proposition $P_0 \Rightarrow P_1 \Rightarrow P_0$. Et de la proposition $P_0 \Rightarrow P_1 \Rightarrow P_1$.

   On considère une application ϕ qui associe un type du lambda-calcul à chaque proposition de la logique propositionnelle minimale.

$$\phi P_i = \rho_i$$
$$\phi(A \Rightarrow B) = (\phi A) \to (\phi B)$$

3. Quelle est le type associé à la proposition $P_0 \Rightarrow P_1 \Rightarrow P_0$?

4. Montrer qu'il existe une démonstration π du séquent $A_1, \ldots, A_p \vdash B$ si et seulement s'il existe un terme t de type ϕB dans le contexte $x_1 : \phi A_1, \ldots, x_p : \phi A_p$.

5. Soit Γ le contexte $A, A \Rightarrow B, B \Rightarrow C, C \Rightarrow D$. Quel est le terme associé à la démonstration

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\Gamma, B \vdash C \Rightarrow D}\text{axiome} \quad \dfrac{\dfrac{}{\Gamma, B \vdash B \Rightarrow C}\text{axiome} \quad \dfrac{}{\Gamma, B \vdash B}\text{axiome}}{\Gamma, B \vdash C}\Rightarrow\text{-élim}}{\Gamma, B \vdash D}\Rightarrow\text{-élim}}{\Gamma \vdash B \Rightarrow D}\Rightarrow\text{-intro} \quad \dfrac{\dfrac{}{\Gamma \vdash A \Rightarrow B}\text{axiome} \quad \dfrac{}{\Gamma \vdash A}\text{axiome}}{\Gamma \vdash B}\Rightarrow\text{-élim}}{\Gamma \vdash D}\Rightarrow\text{-élim}$$

   ? Ce terme termine-t-il ? Quelle est sa forme irréductible ? Quelle est la démonstration associée à cette forme irréductible ?

6. Quelle est la forme des démonstrations qui se traduisent sur un radical ? Quelle est la démonstration associée au terme obtenu en réduisant ce radical ?

Exercice 8.3

Cet exercice demande d'avoir fait l'exercice 1.5.

1. Soit A une proposition quelconque, donner une démonstration — non nécessairement constructive —, dans le calcul des séquents, de la proposition

$$A \vee \neg A$$

   Donner une démonstration constructive de la proposition

$$\neg\neg(A \vee \neg A)$$

   On associe à chaque proposition A de la logique des prédicats une proposition $|A|$ définie par récurrence sur la structure de A de la manière suivante