exemple, l'ensemble des propositions qui ont une démonstration constructive dans la théorie $\exists x\ P(x)$ n'a bien entendu pas la propriété du témoin. Toutefois, on peut montrer que ce théorème s'étend à l'arithmétique et à certaines versions de la théorie des ensembles.

Cette propriété du témoin permet d'utiliser les démonstrations constructives comme des programmes. Par exemple, la proposition

$$\forall x \exists y\ (x = 2 \times y \vee x = 2 \times y + 1)$$

a une démonstration constructive π dans l'arithmétique. À partir de cette démonstration, il n'est pas difficile d'en construire une de la proposition

$$\exists y\ (25 = 2 \times y \vee 25 = 2 \times y + 1)$$

$$\dfrac{\dfrac{\pi}{\Gamma \vdash \forall x \exists y\ A[x,y]} \quad \dfrac{\overline{\Gamma, \exists y\ A[25,y] \vdash \exists y\ A[25,y]}\ \text{axiome}}{\Gamma, \forall x \exists y\ A[x,y] \vdash \exists y\ A[25,y]}\ \forall\text{-gauche}}{\Gamma \vdash \exists y\ A[25,y]}\ \text{coupure}$$

où A est la proposition $x = 2 \times y \vee x = 2 \times y + 1$ et où on note $A[t,u]$ la proposition $(t/x, u/y)A$. En éliminant les coupures dans cette démonstration, on obtient un témoin : 12.

La démonstration π est donc un programme qui divise son entrée 25 par 2. Le mécanisme d'exécution de ce programme est l'élimination des coupures. Par construction, ce programme est correct vis à vis de la spécification

$$x = 2 \times y \vee x = 2 \times y + 1$$

Exercice 8.2

On associe un type à chaque terme du lambda-calcul. Les types sont les expressions closes d'un langage formé d'un ensemble infini de constantes $\rho_0, \rho_1, \rho_2, \ldots$ et d'un symbole binaire $\rightarrow$. Un *contexte de typage* est un ensemble fini de déclarations de la forme $x : \alpha$ où x est une variable et α un type, tel que si $x : \alpha$ et $x : \beta$ appartiennent tous les deux à l'ensemble, alors $\alpha = \beta$. Un jugement de typage est un triplet formé d'un contexte de typage Γ, d'un terme t et d'un type α. Le jugement $\Gamma \vdash t : \alpha$ exprime que le terme t a le type α dans le contexte Γ, par exemple le terme $\mathit{fun}\ x \rightarrow (f\ x\ x)$ a le type $\rho_0 \rightarrow \rho_0$ dans le contexte $f : \rho_0 \rightarrow \rho_0 \rightarrow \rho_0$. Les jugements *dérivables* sont inductivement définis par les règles suivantes

$$\overline{\Gamma \vdash x : \alpha}\ \text{si } x : \alpha \text{ est un élément de } \Gamma$$

$$\frac{\Gamma, x : \alpha \vdash t : \beta}{\Gamma \vdash (\mathit{fun}\ x \rightarrow t) : \alpha \rightarrow \beta}$$

$$\frac{\Gamma \vdash t : \alpha \rightarrow \beta \quad \Gamma \vdash u : \alpha}{\Gamma \vdash (t\ u) : \beta}$$