la règle $\neg$-gauche par

$$\frac{\Gamma \vdash A}{\Gamma, \neg A \vdash B}\ \neg\text{-gauche}$$

et la règle *coupure* par la règle

$$\frac{\Gamma \vdash A \quad \Gamma, A \vdash B}{\Gamma \vdash B}\ \text{coupure}$$

On peut démontrer, en s'inspirant des démonstrations du chapitre 6, qu'un séquent $\Gamma \vdash A$ a une démonstration constructive en déduction naturelle si et seulement s'il a une démonstration constructive en calcul des séquents.

De même on peut montrer qu'en calcul des séquents, un séquent $\Gamma \vdash A$ a une démonstration constructive si et seulement s'il a une démonstration constructive et sans coupures.

Proposition 8.1

Si, en calcul des séquents, un séquent $\vdash A$ a une démonstration sans coupures, alors la dernière règle de cette démonstration est une règle droite.

Démonstration. Comme la partie gauche du séquent est vide, cette règle ne peut pas être une règle gauche, ni la règle *axiome*. Comme la démonstration est sans coupures, ce ne peut pas être la règle *coupure*. C'est donc une règle droite.

Proposition 8.2

L'ensemble des propositions qui ont une démonstration constructive a la propriété du témoin.

Démonstration. Si le séquent $\vdash \exists x\ A$ a une démonstration constructive dans le calcul des séquents, il a aussi une démonstration constructive et sans coupures. La dernière règle de cette démonstration est une règle droite, et comme il n'y a pas de règle *contraction-droite* dans le calcul des séquents constructif, c'est la règle $\exists$-droite. La démonstration a donc la forme

$$\frac{\dfrac{\pi}{\vdash (t/x)A}}{\vdash \exists x\ A}\ \exists\text{-droite}$$

et la proposition $(t/x)A$ a une démonstration constructive.

Dans la démonstration ci-avant, le fait que la partie gauche du séquent soit vide est essentiel. Le théorème ne s'étend pas à une théorie quelconque. Par