qu'il contient une proposition de la forme $\exists x\ A$, il contient la proposition $(t/x)A$ pour un certain terme t.

L'ensemble des propositions démontrables dans la théorie $P(0), \neg P(2)$ n'a donc pas la propriété du témoin.

On peut montrer, de même, que l'ensemble des propositions démontrables dans la théorie vide n'a pas la propriété du témoin. Il suffit pour cela de considérer la proposition

$$\exists x\ ((P(0) \wedge \neg P(2)) \Rightarrow (P(x) \wedge \neg P(S(x))))$$

Exercice 8.1

Montrer que la proposition $\exists x\ (P(x) \vee \neg P(S(x)))$ est démontrable, mais qu'il n'existe pas de terme t tel que $P(t) \vee \neg P(S(t))$ soit démontrable.

Dans la démonstration du séquent $P(0), \neg P(2) \vdash \exists x\ (P(x) \wedge \neg P(S(x)))$, l'utilisation du tiers exclu pour montrer la proposition $P(1) \vee \neg P(1)$ semble essentielle. On peut donc se demander si ce séquent peut être démontré sans utiliser le tiers exclu. Comme nous allons le voir, ce n'est pas le cas, car l'ensemble des propositions démontrables en logique des prédicats sans utiliser le tiers exclu a la propriété du témoin.

Définition 8.2 (Démonstration constructive)

Une démonstration en déduction naturelle est *constructive* si elle n'utilise pas la règle *tiers exclu*. Une démonstration dans le système D' est *constructive* si elle ne contient que des séquents de la forme $\Gamma \vdash \Delta$ où Δ est un singleton. Une démonstration en calcul des séquents est *constructive* si elle ne contient que des séquents de la forme $\Gamma \vdash \Delta$ où Δ est un singleton ou le multiensemble vide. En calcul des séquents, on supprime la règle *contraction-droite* et on modifie quelques règles : la règle $\vee$-droite est remplacée par les deux règles

$$\frac{\Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash A \vee B}\ \vee\text{-droite}$$

$$\frac{\Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash A \vee B}\ \vee\text{-droite}$$

la règle $\Rightarrow$-gauche par

$$\frac{\Gamma \vdash A \quad \Gamma, B \vdash C}{\Gamma, A \Rightarrow B \vdash C}\ \Rightarrow\text{-gauche}$$