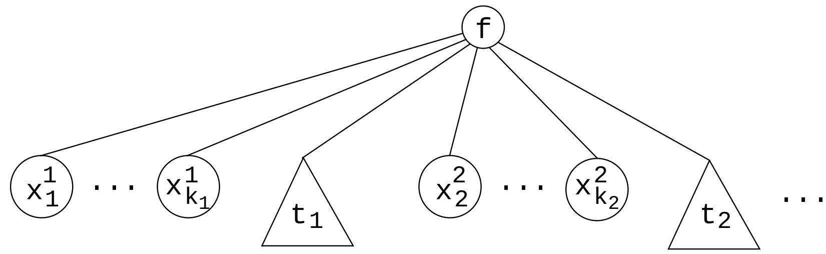
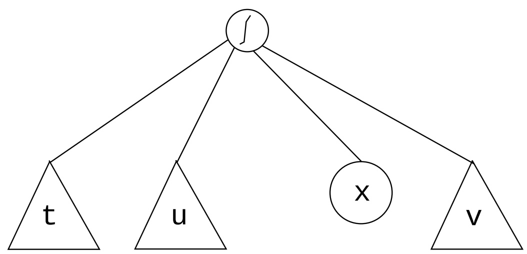


Par exemple, l'expression $\int_t^u v\ dx$ désigne l'arbre



1.2.3 Les langages à plusieurs sortes d'expressions

On aura besoin, dans ce livre, d'utiliser des langages un peu plus généraux appelés *langages à plusieurs sortes d'expressions*. Si on se donne des constantes 0 et 1, un symbole binaire $+$, des symboles unaires *pair* et *impair* et un symbole binaire $\Rightarrow$, aucun de ces symboles ne liant de variables, on peut former les expressions 1, $1+1$, $pair(1+1)$ et $impair(1) \Rightarrow pair(1+1)$, mais on peut malheureusement former également les expressions $impair(pair(1))$ ou $1 \Rightarrow (1 + pair(1))$. Pour les exclure, il faut distinguer deux sortes d'expressions : les *termes*, qui expriment des entiers et les *propositions* qui expriment des faits concernant ces entiers. Ainsi, le symbole *pair* prend en argument un terme pour former une proposition et le symbole $\Rightarrow$ prend en argument deux propositions pour former une proposition.

Pour cela, on introduit un ensemble à deux éléments $\{Terme, Prop\}$ dont les éléments sont appelés des *sortes d'expressions* et on associe au symbole *pair* l'arité $(Terme, Prop)$ qui indique que dans une expression de la forme $pair(t)$, l'expression t doit être de sorte $Terme$ alors que l'expression $pair(t)$ elle-même est de sorte $Prop$.

On introduit, plus généralement, un ensemble $\mathcal{S}$ de sortes. L'arité d'un symbole f est alors une suite finie de sortes $(s_1, \ldots, s_n, s')$ qui indique que le symbole f a n arguments, que le premier est de sorte s_1, ..., le n-ième de sorte s_n et que l'expression formée est elle-même de la sorte s'.