8
La constructivité

Si un ensemble contient l'entier 0, mais pas l'entier 2, on peut montrer qu'il existe un entier qui appartient à cet ensemble, mais dont le successeur ne lui appartient pas : il faut bien, en effet, qu'à un moment ou a un autre, la suite des entiers sorte de l'ensemble. On peut même montrer que ce nombre est égal ou bien à 0 ou bien à 1. Mais, on ne peut pas montrer que ce nombre est égal à 0 ni qu'il est égal à 1, car il faudrait pour cela savoir si le nombre 1 appartient à l'ensemble ou non.

En logique des prédicats cela se traduit par le fait que le séquent

$$\Gamma \vdash \exists x\ (P(x) \wedge \neg P(S(x)))$$

où $\Gamma = P(0), \neg P(2)$ est démontrable

$$\dfrac{\dfrac{}{\Gamma \vdash P(1) \vee \neg P(1)} \quad \dfrac{\dfrac{\dots}{\Gamma, P(1) \vdash P(1) \wedge \neg P(2)}}{\Gamma, P(1) \vdash \exists x\ (P(x) \wedge \neg P(S(x)))} \quad \dfrac{\dfrac{\dots}{\Gamma, \neg P(1) \vdash P(0) \wedge \neg P(1)}}{\Gamma, \neg P(1) \vdash \exists x\ (P(x) \wedge \neg P(S(x)))}}{\Gamma \vdash \exists x\ (P(x) \wedge \neg P(S(x)))}$$

En revanche, pour chaque terme t, le séquent $P(0), \neg P(2) \vdash P(t) \wedge \neg P(S(t))$ n'est pas démontrable. En effet, en prenant $\mathcal{M} = \mathbb{N}$, en interprétant 0 et S de manière évidente et P successivement par la fonction caractéristique de la paire $\{0, 1\}$ et du singleton $\{0\}$, on obtient deux modèles dans lesquels le terme t a la même dénotation et qui réfutent le séquent ci-avant, le premier dans le cas où la dénotation de t est nulle et le second dans le cas où elle est non nulle.

Définition 8.1 (La propriété du témoin)

On dit qu'un ensemble de propositions a la *propriété du témoin* si chaque fois