pour tout p, tel que $A''[p, q_1, \ldots, q_n]$ est équivalent à $A''[p + r, q_1, \ldots, q_n]$, il existe des entiers p arbitrairement grands tels que $A''[p, q_1, \ldots, q_n]$ soit valide, et pour p assez grand $A''[p, q_1, \ldots, q_n]$ est équivalent à $A'[p, q_1, \ldots, q_n]$. Il existe donc un entier p tel que $A'[p, q_1, \ldots, q_n]$ soit valide.

Proposition 7.2

Soit A une proposition du langage $\mathcal{L}$, alors il existe une proposition B sans quantificateurs telle que $A \Leftrightarrow B$ soit valide dans $\mathbb{Z}$.

Démonstration. On remplace les propositions de la forme $\forall x\ C$ par la proposition équivalente $\neg\exists x \neg C$ et on conclut avec une démonstration par récurrence sur la structure de la proposition ainsi obtenue, en utilisant la proposition 7.1 dans le cas du quantificateur existentiel.

Théorème 7.1

L'ensemble des propositions formées dans le langage $0, 1, +, -, \leq$ et valide dans $\mathbb{Z}$ est décidable.

Démonstration. La validité des propositions closes et sans quantificateurs est évidemment décidable, celle des propositions quelconques s'en déduit par la proposition 7.2.

On peut en déduire un résultat similaire pour les entiers naturels.

Théorème 7.2 (Presburger)

L'ensemble des propositions formées dans le langage $0, S, +, =$ et valide dans $\mathbb{N}$ est décidable.

Démonstration. À chaque proposition A du langage $0, S, +, =$ on associe une proposition $|A|$ du langage $0, 1, +, -, \leq$ telle que pour toute proposition close A, A est valide dans $\mathbb{N}$ si et seulement si $|A|$ est valide dans $\mathbb{Z}$.

- $|0| = 0$, $|x| = x$, $|S(t)| = |t| + 1$, $|t + u| = |t| + |u|$,
- $|t = u| = |t| \leq |u| \wedge |u| \leq |t|$,
- $|\top| = \top$, $|\bot| = \bot$, $|\neg A| = \neg|A|$, $|A \wedge B| = |A| \wedge |B|$, $|A \vee B| = |A| \vee |B|$, $|A \Rightarrow B| = |A| \Rightarrow |B|$,
- $|\forall x\ A| = \forall x\ (0 \leq x \Rightarrow |A|)$, $|\exists x\ A| = \exists x\ (0 \leq x \wedge |A|)$.