$t \leq x'$, $0 \leq t$, $Mult_n(x'+t)$ et $Mult_n(t)$ où t est un terme qui ne contient pas la variable x'.

Soit r un multiple commun de tous les entiers n tels que la proposition atomique $Mult_n(x'+t)$ apparaisse dans A'.

Si on fixe la valeur des variables distinctes de x', la valeur de vérité d'une telle proposition est une fonction de la valeur associée à x' qui est périodique de période r à partir d'un certain rang. En effet, au-delà d'une certaine valeur, les propositions de la forme $x' \leq t$ sont toujours fausses et celles de la forme $t \leq x'$ toujours vraies, seules celles de la forme $Mult_n(x'+t)$ changent de valeur selon une période r.

Soit E l'ensemble de tous les termes t tels que la proposition atomique $x' \leq t$ apparaisse dans A'. Soit A'' la proposition obtenue en remplaçant dans A' les propositions de la forme $x' \leq t$ par $\bot$ et les propositions de la forme $t \leq x'$ par $\top$ et soit B la disjonction de toutes les propositions de la forme

- $(i/x')A''$ où i est un entier compris entre 0 et $r-1$,
- $((t-j)/x')A'$ où t est un terme de E et j un entier compris entre 0 et $r-1$.

Montrons que la proposition $(\exists x'\ A') \Leftrightarrow B$ est valide dans $\mathbb{Z}$.

Soient $y_1, \ldots, y_n$ les variables de A' distinctes de x'. On écrit $A'[p, q_1, \ldots, q_n]$ la proposition $(p/x', q_1/y_1, \ldots, q_n/y_n)A'$, $A''[p, q_1, \ldots, q_n]$ la proposition $(p/x', q_1/y_1, \ldots, q_n/y_n)A''$ et $B[q_1, \ldots, q_n]$ la proposition $(q_1/y_1, \ldots, q_n/y_n)B$. On veut montrer que pour tout $q_1, \ldots, q_n$, il existe un entier p tel que $A'[p, q_1, \ldots, q_n]$ soit valide si et seulement si $B[q_1, \ldots, q_n]$ est valide.

Supposons qu'il existe un entier p tel que $A'[p, q_1, \ldots, q_n]$ soit valide, dans ce cas, ou bien, pour tout v, $A'[p+vr, q_1, \ldots, q_n]$ est valide, ou bien non.

Dans le premier cas, il existe des entiers p' arbitrairement grands tels que $A'[p', q_1, \ldots, q_n]$ soit valide, et pour p' suffisamment grand $A'[p', q_1, \ldots, q_n]$ est équivalent à $A''[p', q_1, \ldots, q_n]$. Il existe donc un entier p' tel que $A''[p', q_1, \ldots, q_n]$ soit valide. Or, pour tout p, $A''[p, q_1, \ldots, q_n]$ est équivalent à $A''[p-r, q_1, \ldots, q_n]$. Il existe donc un entier i compris entre 0 et $r-1$ tel que $A''[i, q_1, \ldots, q_n]$ soit valide. La proposition $B[q_1, \ldots, q_n]$ est donc valide.

Dans le second cas, il existe un entier p' tel que $A'[p', q_1, \ldots, q_n]$ soit valide, mais pas $A'[p'+r, q_1, \ldots, q_n]$. Il existe donc une proposition atomique de la forme $x' \leq t$ qui est vérifiée en p' mais pas en $p'+r$. Écrivons $t[q_1, \ldots, q_n]$ le terme $(q_1/y_1, \ldots, q_n/y_n)t$. On a $p' \leq t[q_1, \ldots, q_n]$, mais $t[q_1, \ldots, q_n] < p'+r$, il existe donc un entier j compris entre 0 et $r-1$ tel que $p' = t[q_1, \ldots, q_n] - j$. La proposition $B[q_1, \ldots, q_n]$ est donc valide.

Réciproquement, si $B[q_1, \ldots, q_n]$ est valide, alors, ou bien il existe un entier i tel que $A''[i, q_1, \ldots, q_n]$ soit valide ou bien il existe un élément t de E et un entier j tels que $A'[t[q_1, \ldots, q_m] - j, q_1, \ldots, q_n]$ soit valide. Dans ce second cas, il existe un entier p tel que $A'[p, q_1, \ldots, q_n]$ soit valide. Dans le premier, comme