la proposition, équivalente à $\exists x\ A$, suivante $\exists x'\ (2 \leq x' \wedge x' \leq 3.y \wedge \mathit{Mult}_6(x'))$. Appelons A' la proposition $2 \leq x' \wedge x' \leq 3.y \wedge \mathit{Mult}_6(x')$.

Fixons une valeur q pour y et supposons qu'il existe un entier p qui vérifie cette proposition. Deux cas peuvent alors se produire. Ou bien, tous les nombres supérieurs à p et congrus à p modulo 6 la vérifient également, ou bien, comme dans cet exemple, ce n'est pas le cas. Dans ce cas, il existe un entier p' qui vérifie la proposition et tel que $p' + 6$ ne la vérifie pas. Cela signifie qu'il existe une inéquation, ici $x' \leq 3.y$, qui a changé d'avis entre p' et $p' + 6$. Donc $p' \leq 3.q < p' + 6$. Il existe donc un entier j compris entre 0 et 5 tel que $3.q = p' + j$ et donc $p' = 3.q - j$ vérifie la proposition ci-avant. Autrement dit, la proposition A' dans laquelle on substitue y par q et x' par $3.q - j$ pour un certain j compris entre 0 et 5 est valide dans $\mathbb{Z}$.

Soit B la proposition sans quantificateurs $(3.y/x')A' \vee ((3.y-1)/x')A' \vee ((3.y-2)/x')A' \vee ((3.y-3)/x')A' \vee ((3.y-4)/x')A' \vee ((3.y-5)/x')A'$. La proposition B, dans laquelle on substitue y par q est valide dans $\mathbb{Z}$. Réciproquement, si cette proposition est valide dans $\mathbb{Z}$, alors $\exists x'\ A'$ est également valide.

La proposition ci-après généralise cette construction.

Proposition 7.1

Soit A une proposition sans quantificateurs dans le langage $\mathcal{L}$, il existe une proposition B sans quantificateurs telle que la proposition $(\exists x\ A) \Leftrightarrow B$ soit valide dans le modèle $\mathbb{Z}$.

Démonstration. On commence par supprimer dans A les implications en remplaçant les propositions de la forme $C \Rightarrow D$ par la proposition équivalente $\neg C \vee D$. On supprime ensuite les négations en remplaçant les propositions de la forme $\neg\top$ par $\bot$, $\neg\bot$ par $\top$, $\neg(C \wedge D)$ par $\neg C \vee \neg D$, $\neg(C \vee D)$ par $\neg C \wedge \neg D$, $\neg\neg C$ par C, $\neg\ t \leq u$ par $u+1 \leq t$ et $\neg\ \mathit{Mult}_n(t)$ par $\mathit{Mult}_n(t+1) \vee \ldots \vee \mathit{Mult}_n(t+n-1)$ jusqu'à la disparition complète du symbole $\neg$. On obtient alors une proposition formée avec les connecteurs $\top$, $\bot$, $\wedge$, $\vee$ à partir de propositions atomiques de la forme $t \leq u$ ou $\mathit{Mult}_n(t)$.

On rassemble ensuite, dans chaque inéquation, les x d'un côté du signe $\leq$ et les autres termes de l'autre. Puis on remplace chaque proposition de la forme $t \leq u$ par la proposition équivalente $k.t \leq k.u$ pour un entier k strictement positif et chaque proposition de la forme $\mathit{Mult}_n(t)$ par $\mathit{Mult}_{kn}(k.t)$ de manière à obtenir le même coefficient s pour x dans toutes les propositions atomiques. On remplace ensuite tous les termes de la forme $s.x$ par une variable x' et on ajoute la proposition atomique $\mathit{Mult}_s(x')$. On obtient alors une proposition, équivalente à la proposition $\exists x\ A$ de la forme $\exists x'\ A'$ où A' est formée avec les connecteurs $\top$, $\bot$, $\wedge$, $\vee$ à partir de propositions atomiques de la forme $x' \leq t$,