Pour démontrer ce théorème, on doit étendre le langage ci-avant en ajoutant pour chaque entier naturel n non nul, un prédicat unaire $Mult_n$, qui caractérise les multiples de n.

Définition 7.1

Soit $\mathcal{L}$ le langage constitué des constantes 0 et 1, des symboles de fonction binaire $+$ et $-$, d'un symbole de prédicat binaire $\leq$ et, pour chaque entier naturel non nul n, d'un symbole de prédicat unaire $Mult_n$.

Si n est un entier positif, on écrit n l'entier $1+1+\ldots+1$ avec n occurrences du symbole 1 et si n est négatif, on écrit n l'entier $0-1-1-\ldots-1$ avec $-n$ occurrences du symbole 1. De même, on écrit $1.x$ le terme x, $2.x$ le terme $x+x$, $3.x$ le terme $x+x+x$, $\ldots$, $(-1).x$ le terme $0-x$, $(-2).x$ le terme $0-x-x$, $\ldots$ et $0.x$ le terme 0.

Définition 7.2 (Le modèle $\mathbb{Z}$)

Le modèle $\mathbb{Z}$ est formé de l'ensemble $\mathbb{Z}$, des entiers 0 et 1, de l'addition et de la soustraction de $\mathbb{Z}$ de la relation d'ordre sur $\mathbb{Z}$ et, pour tout entier naturel non nul n, de la fonction caractéristique de l'ensemble des multiples de n.

Commençons par un exemple. Soit A la proposition $1 \leq 3.x \wedge x \leq 7-x$, qui contient une unique variable libre x. On veut décider si la proposition $\exists x\ A$ est valide ou non dans $\mathbb{Z}$. Pour cela, dans chaque inéquation, on commence par rassembler les x d'un côté du signe $\leq$ et les autres termes de l'autre. Puis on multiplie la première inéquation par 2 et la seconde par 3 de manière à obtenir le même coefficient pour x dans toutes les inéquations. On obtient alors la proposition équivalente $\exists x\ (2 \leq 6.x \wedge 6.x \leq 21)$. On fait alors un changement de variable, qui donne la proposition équivalente à $\exists x'\ (2 \leq x' \wedge x' \leq 21 \wedge Mult_6(x'))$. On doit donc décider de l'existence d'un multiple de 6 dans l'intervalle des nombres compris entre 2 et 21 et la réponse est positive.

Si, maintenant, la proposition A contient d'autres variables que x, on ne veut plus simplement décider si la proposition $\exists x\ A$, qui contient des variables libres, est valide ou non, mais on veut la transformer en une proposition équivalente, sans quantificateurs et qui contient ces mêmes variables. Considérons, par exemple, la proposition $1 \leq 3.x \wedge x \leq y-x$. On commence, comme ci-avant, par rassembler les x d'un côté du signe $\leq$ et les autres termes de l'autre puis on multiplie chaque inégalité de manière à obtenir le même coefficient pour x dans chaque inéquation et on effectue un changement de variable. On obtient