7
Des théories décidables

Nous avons vu, au chapitre 5, que la logique des prédicats était indécidable mais, d'une part, qu'elle était semi-décidable et, d'autre part, qu'en ajoutant des axiomes, on rendait parfois la démontrabilité décidable. La semi-décidabilité nous a mené, au chapitre 6, à développer des algorithmes de recherche de démonstrations, qui ne terminent pas quand la proposition dont on recherche une démonstration n'est pas démontrable. Nous allons voir, dans ce chapitre, un exemple d'algorithme qui permet de décider la démontrabilité dans une théorie particulière.

Diverses méthodes peuvent être employées pour décider la démontrabilité dans une théorie. L'une d'elle consiste à montrer que si une proposition n'est pas démontrable dans cette théorie, alors il existe un modèle fini de la théorie dans laquelle cette proposition n'est pas valide. Ainsi, en énumérant d'une part les démonstrations, d'autre part les modèles finis, on finit par trouver une démonstration dans le cas où la proposition est démontrable et un modèle dans le cas où elle ne l'est pas.

Une autre méthode, la méthode d'*élimination des quantificateurs*, consiste à montrer, d'une part, que la démontrabilité d'une proposition close sans quantificateurs peut se déterminer par une simple analyse de cette proposition et, d'autre part, que toute proposition close peut se transformer en une proposition close sans quantificateurs qui lui est équivalente. Nous utilisons cette méthode pour démontrer la décidabilité de l'ensemble des propositions du langage $0, 1, +, -, \leq$ valides dans $\mathbb{Z}$. Cet ensemble étant décidable, on peut poser chacun de ses éléments en axiome. On obtient ainsi une théorie cohérente, complète et décidable.