2. Montrer que pour toute proposition A, il existe un ensemble de clauses $C_1, \ldots, C_n$, tel que le séquent $\vdash A$ soit démontrable si et seulement si le séquent $\overline{\forall} C_1, \ldots, \overline{\forall} C_n \vdash$ est démontrable. Quel est l'ensemble de clauses associé à la proposition suivante ?

$$(P(a,b) \wedge P(b,c) \wedge \forall x \forall y \forall z \; ((P(x,y) \wedge P(y,z)) \Rightarrow G(x,z))) \Rightarrow G(a,c)$$

3. On veut montrer que si $C_1, \ldots, C_n \rightsquigarrow \varnothing$, alors le séquent $\overline{\forall} C_1, \ldots, \overline{\forall} C_n \vdash$ est démontrable. On montre plus généralement que si $C_1, \ldots, C_n \rightsquigarrow D$, alors le séquent $\overline{\forall} C_1, \ldots, \overline{\forall} C_n \vdash \overline{\forall} D$ est démontrable.

   Montrer que si $D = (t/x)C$, alors le séquent $\overline{\forall} C \vdash \overline{\forall} D$ est démontrable.

   Montrer que si $C_1 = C_1' \cup \{A\}$ et $C_2 = C_2' \cup \{\neg A\}$ et $D = C_1' \cup C_2'$, alors le séquent $\overline{\forall} C_1, \overline{\forall} C_2 \vdash \overline{\forall} D$ est démontrable.

   Soit $C_1, \ldots, C_n$ un ensemble de clauses, montrer que si $C_1, \ldots, C_n \rightsquigarrow D$, alors le séquent $\overline{\forall} C_1, \ldots, \overline{\forall} C_n \vdash \overline{\forall} D$ est démontrable.

   Montrer que si le séquent $\Gamma \vdash \bot$ est démontrable, alors le séquent $\Gamma \vdash$ l'est aussi.

   Montrer que si $C_1, \ldots, C_n \rightsquigarrow \varnothing$, alors le séquent $\overline{\forall} C_1, \ldots, \overline{\forall} C_n \vdash$ est démontrable.

4. On veut maintenant montrer la réciproque, c'est-à-dire que si le séquent $\overline{\forall} C_1, \ldots, \overline{\forall} C_n \vdash$ est démontrable, alors $C_1, \ldots, C_n \rightsquigarrow \varnothing$.

   Soit E un ensemble de clauses et C et D deux clauses. Montrer que si $E \rightsquigarrow C$ et $E \cup \{C\} \rightsquigarrow D$, alors $E \rightsquigarrow D$.

   Soit D est une clause close, $E = \{C_1, \ldots, C_n\}$ et $E' = \{C_1', \ldots, C_n'\}$ deux ensembles de clauses closes, tels que pour tout i, C_i' est ou bien la clause C_i ou bien la clause $C_i \cup D$ et C une clause close. Montrer que si $E \rightsquigarrow C$, alors ou bien $E' \rightsquigarrow C$ ou bien $E' \rightsquigarrow C \cup D$. Montrer que si $E \rightsquigarrow \varnothing$, alors ou bien $E' \rightsquigarrow \varnothing$ ou bien $E' \rightsquigarrow D$. Montrer que si C et C' sont deux clauses closes et $E \cup \{C\} \rightsquigarrow \varnothing$ et $E \cup \{C'\} \rightsquigarrow \varnothing$, alors $E, (C \cup C') \rightsquigarrow \varnothing$.

   Soient $C_1, \ldots, C_n$ des clauses closes et $P_1, \ldots, P_m$ des propositions atomiques closes. Montrer que si le séquent $\overline{\forall} C_1, \ldots, \overline{\forall} C_n \vdash P_1, \ldots, P_m$ est démontrable, alors $C_1, \ldots, C_n, \neg P_1, \ldots, \neg P_m \rightsquigarrow \varnothing$. Montrer que si le séquent $\overline{\forall} C_1, \ldots, \overline{\forall} C_n \vdash$ est démontrable, alors $C_1, \ldots, C_n \rightsquigarrow \varnothing$.

   Soient $C_1, \ldots, C_n$ des clauses quelconques. Montrer que si le séquent $\overline{\forall} C_1, \ldots, \overline{\forall} C_n \vdash$ est démontrable, alors $C_1, \ldots, C_n \rightsquigarrow \varnothing$. Indice : utiliser le théorème de Herbrand.

   Soient $C_1, \ldots, C_n$ des clauses quelconques. Montrer que le séquent $\overline{\forall} C_1, \ldots, \overline{\forall} C_n \vdash$ est démontrable si et seulement si $C_1, \ldots, C_n \rightsquigarrow \varnothing$.

5. Les trois règles ci-avant ne peuvent pas encore être utilisées comme un algorithme de recherche de démonstrations, car la deuxième demande de choisir