des instances closes $A_1^1, \ldots, A_1^{p_1}$ de A_1, $\ldots$, $A_n^1, \ldots, A_n^{p_n}$ de A_n, telles que le séquent sans quantificateurs $\Gamma \vdash A_1^1, \ldots, A_1^{p_1}, \ldots, A_n^1, \ldots, A_n^{p_n}, \Delta$ soit démontrable dans le calcul des séquents sans coupures.

Soient $A_1, \ldots, A_n$ des propositions existentielles closes. Montrer que si le langage contient au moins une constante, alors le séquent $\vdash A_1, \ldots, A_n$ est démontrable dans le calcul des séquents sans coupures si et seulement s'il existe des instances closes $A_1^1, \ldots, A_1^{p_1}$ de A_1, $\ldots$, $A_n^1, \ldots, A_n^{p_n}$ de A_n, telles que le séquent sans quantificateurs $\vdash A_1^1, \ldots, A_1^{p_1}, \ldots, A_n^1, \ldots, A_n^{p_n}$ soit démontrable dans le calcul des séquents sans coupures.

Soient $A_1, \ldots, A_n$ des propositions universelles closes. Montrer, de même, que si le langage contient au moins une constante, le séquent $A_1, \ldots, A_n \vdash$ est démontrable dans le calcul des séquents sans coupures si et seulement s'il existe des instances closes $A_1^1, \ldots, A_1^{p_1}$ de A_1, $\ldots$, $A_n^1, \ldots, A_n^{p_n}$ de A_n, telles que le séquent sans quantificateurs $A_1^1, \ldots, A_1^{p_1}, \ldots, A_n^1, \ldots, A_n^{p_n} \vdash$ soit démontrable dans le calcul des séquents sans coupures.

Exercice 6.6 (La résolution)

Cet exercice demande d'avoir fait les exercices 6.2, 6.3 et 6.5.

Une *clause* est un ensemble fini de propositions, dans lequel chaque proposition est une proposition atomique ou la négation d'une proposition atomique.

Si $C = \{A_1, \ldots, A_n\}$ est une clause, on écrit $\overline{\forall} C$ la proposition $\forall x_1 \ldots \forall x_p$ $(A_1 \vee \ldots \vee A_n)$, où $x_1, \ldots, x_p$ sont les variables libres de $A_1, \ldots, A_n$ et $\overline{\forall}\varnothing = \bot$ par convention.

Soit E un ensemble de clauses, on considère l'ensemble de clauses G inductivement défini par les trois règles suivantes

- si C appartient à E, alors C appartient à G,
- C appartient à G, alors $(t/x)C$ appartient à G,
- si $C_1 \cup \{A\}$ et $C_2 \cup \{\neg A\}$ appartiennent à G, alors $C_1 \cup C_2$ appartient à G.

On écrit $E \rightsquigarrow C$ pour exprimer que la clause C appartient à l'ensemble G.

1. Soit E l'ensemble formé des quatre clauses

$$P(a, b)$$

$$P(b, c)$$

$$\neg P(x, y), \neg P(y, z), G(x, z)$$

$$\neg G(a, c)$$

Donner une dérivation de $E \rightsquigarrow \varnothing$.