– Si f est un symbole d'arité n et t_1, ..., t_n sont des expressions alors $f(t_1, \ldots, t_n)$, c'est-à-dire l'arbre dont la racine est étiquetée par f et dont les sous-arbres immédiats sont t_1, ..., t_n, est une expression.

1.2.2 Les variables

Imaginons que nous voulions définir un langage qui contient des expressions comme $impair(3)$ ou $impair(3) \Rightarrow pair(3+1)$. Nous voudrons alors probablement aussi pouvoir exprimer que pour tout entier, si cet entier est impair, alors son successeur est pair.

Pour former de telles expressions, les langues naturelles, comme le français, utilisent des pronoms indéfinis, par exemple *tous* et *quelques*. Mais ce mécanisme est ambigu quand plusieurs expressions sont remplacées par de tels pronoms. Ainsi, la phrase « Il existe un nombre entier supérieur à tout nombre entier » peut signifier ou bien que pour chaque nombre entier, il existe un nombre entier qui lui est supérieur, ce qui est vrai, ou bien qu'il existe un nombre qui est supérieur à tous les nombres entiers, ce qui est faux. On utilise donc un mécanisme plus complexe, qui consiste à utiliser dans un premier temps une variable, dont on indique ensuite la signification et la portée par un quantificateur $\forall$, *pour tout*, ou $\exists$, *il existe*, qui lie cette variable. Ainsi, on distingue les propositions $\forall x \exists y\ (y \geq x)$ et $\exists y \forall x\ (y \geq x)$.

Les quantificateurs sont donc des symboles qui lient une variable dans leur argument. D'autres exemples de symboles lieurs sont les symboles $\mapsto$, ∂/∂, $\int d$, $\sum$, $\prod$, ... Nous devons donc étendre la notion de langage définie ci-avant de manière à prendre en compte le fait que chaque symbole du langage peut lier des variables.

L'arité d'un symbole f ne sera désormais plus un entier n, mais une suite finie d'entiers $(k_1, \ldots, k_n)$ qui indique que le symbole f lie k_1 variables dans son premier argument, k_2 variables dans le deuxième, ..., k_n variables dans le n-ième.

Ainsi, quand on s'est donné un langage, c'est-à-dire un ensemble de symboles munis d'une arité, et un ensemble infini dont les éléments sont appelés *variables*, on définit les expressions inductivement par les règles suivantes.

– Les variables sont des expressions.
– Si f est un symbole d'arité $(k_1, \ldots, k_n)$, t_1, ..., t_n sont des expressions et x^1_1, ..., $x^1_{k_1}$, ..., x^n_1, ..., $x^n_{k_n}$ sont des variables, alors $f(x^1_1 \ldots x^1_{k_1} t_1, \ldots, x^n_1 \ldots x^n_{k_n} t_n)$ est une expression.

La notation $f(x^1_1 \ldots x^1_{k_1} t_1, \ldots, x^n_1 \ldots x^n_{k_n} t_n)$ désigne l'arbre