$(A \vee C) \wedge (B \vee C)$, $(\top \vee A) \Leftrightarrow \top$, $(A \vee \top) \Leftrightarrow \top$, $(\bot \vee A) \Leftrightarrow A$ et $(A \vee \bot) \Leftrightarrow A$ sont démontrables.

Montrer que, pour toute proposition sans quantificateurs A, il existe une proposition normale conjonctive A', telle que la proposition $A \Leftrightarrow A'$ soit démontrable.

3. Montrer que, pour toute proposition A, il existe une proposition universelle A' de la forme $\forall x_1 \ldots \forall x_n\ C$, où C est une proposition normale conjonctive telle que le séquent $A' \vdash$ soit démontrable si et seulement si le séquent $\vdash A$ est démontrable.

   Montrer que la proposition $(\forall x\ (A \wedge B)) \Leftrightarrow ((\forall x\ A) \wedge (\forall x\ B))$ est démontrable. Montrer que le séquent $\Gamma, A \wedge B \vdash \Delta$ est démontrable si et seulement si le séquent $\Gamma, A, B \vdash \Delta$ est démontrable.

   Montrer que, pour toute proposition A, il existe des propositions $C_1, \ldots, C_p$ de la forme $\bot$ ou $\forall x_1 \ldots \forall x_n\ (D_1 \vee (\ldots \vee D_m))$, où chaque D_i est une proposition atomique ou la négation d'une proposition atomique, telles que le séquent $\vdash A$ soit démontrable si et seulement si le séquent $C_1, \ldots, C_p \vdash$ est démontrable.

Exercice 6.4

Cet exercice demande d'avoir fait l'exercice 6.2.

1. Montrer que l'on obtient un système équivalent au calcul des séquents sans coupures si on restreint la règle *contraction-gauche* aux propositions de la forme $\forall x\ A$ et la règle *contraction-droite* aux propositions de la forme $\exists x\ A$.
2. Montrer que la démonstration d'une proposition existentielle dans le calcul des séquents sans coupures n'utilise jamais les règles $\exists$-gauche et $\forall$-droite. Montrer que dans le calcul des séquents sans coupures, privé des règles $\exists$-gauche et $\forall$-droite, le choix de la proposition est indifférent.
3. Écrire un programme de recherche de démonstrations dans le calcul des séquents.

Exercice 6.5 (Le théorème de Herbrand)

Soit A une proposition prénexe close de la forme $\mathcal{Q}_1 x_1 \ldots \mathcal{Q}_n x_n\ C$. On appelle *instance close* de A, une proposition close de la forme σC, où σ est une substitution de domaine $x_1, \ldots, x_n$.

Soient $A_1, \ldots, A_n$ des propositions existentielles closes et Γ et Δ des multiensembles de propositions closes sans quantificateurs. Montrer que si le langage contient au moins une constante, alors le séquent $\Gamma \vdash A_1, \ldots, A_n, \Delta$ est démontrable dans le calcul des séquents sans coupures si et seulement s'il existe