$$f(f(c))/X, f(c)/Y$$
$$f(Z)/X, Z/Y$$
$$f(Y)/X$$

Une solution σ est dite *principale* si pour chaque solution τ il existe une substitution η telle que $\tau = \eta \circ \sigma$. Par exemple, les deux dernières substitutions ci-avant sont principales, mais pas les deux premières. On peut démontrer qu'un problème d'unification qui a une solution a toujours une solution principale, et que la solution calculée par l'algorithme d'unification est principale.

On peut également démontrer que si σ est une solution principale d'un problème d'unification et τ une solution quelconque, alors l'ensemble des variables ordinaires de τX est inclus dans celui des variables ordinaires de σX. Pour décider s'il existe une solution τ d'un problème d'unification qui vérifie des contraintes d'occurrence de la forme « x n'apparaît pas dans τY », il suffit donc d'observer si la solution principale σ, calculée par l'algorithme d'unification, vérifie ces contraintes.

Ainsi, on peut décider de l'existence d'une substitution qui parfait un schéma de démonstration. Ce qui montre que l'ensemble des séquents, qui ont une démonstration de hauteur inférieure à h, dans le calcul des séquents sans coupures, est décidable.

Il y a également de nombreuses manières de restreindre le choix de la proposition et le choix de la règle, on donne quelques exemples à l'exercice 6.4.

Définition 6.8

Une proposition *prénexe* est une proposition de la forme $\mathcal{Q}_1 x_1 \ldots \mathcal{Q}_n x_n\ C$ où $\mathcal{Q}_1, \ldots, \mathcal{Q}_n$ sont des quantificateurs, $\forall$ ou $\exists$, et C est une proposition sans quantificateurs. Une proposition *existentielle* est une proposition de la forme $\exists x_1 \ldots \exists x_n\ C$ où C est une proposition sans quantificateurs. Une proposition *universelle* est une proposition de la forme $\forall x_1 \ldots \forall x_n\ C$ où C est une proposition sans quantificateurs.

Une proposition sans quantificateurs est une proposition *normale conjonctive* si elle est de la forme $\top$ ou $C_1 \wedge (\ldots \wedge C_n)$ où chaque proposition C_i est de la forme $\bot$ ou $D_1 \vee (\ldots \vee D_m)$ où chaque D_i est une proposition atomique ou la négation d'une proposition atomique.

Exercice 6.2 (Transformer le séquent : les quantificateurs)

Cet exercice demande d'avoir fait l'exercice 1.5.

1. Montrer que si le séquent $\vdash A \Leftrightarrow A'$ est démontrable alors le séquent $\Gamma, A \vdash \Delta$ est démontrable si et seulement si le séquent $\Gamma, A' \vdash \Delta$ est