alors la variable x n'est libre ni dans $\sigma\Gamma$ ni dans $\sigma\Delta$. Autrement dit, x n'est pas libre dans Γ, Δ et si Y est libre dans Γ, Δ, alors x n'est pas libre dans σY.

Par exemple, la substitution $f(c)/X$ parfait le schéma de démonstration ci-avant et donne la démonstration

$$\dfrac{\overline{P(f(f(c))) \vdash P(f(f(c)))}\ \text{axiome}}{P(f(f(c))) \vdash \exists x\ P(f(x))}\ \exists\text{-droite}$$

Si on se donne un schéma de démonstration π, on peut décider s'il existe ou non une substitution qui le parfait.

En effet, pour cela, on doit trouver une substitution σ et, pour chaque séquent $\Gamma \vdash \Delta$ démontré par la règle *axiome'*, un couple formé d'une proposition atomique A de Γ et d'une proposition atomique B de Δ tel que $\sigma A = \sigma B$. Comme il y a, dans π, un nombre fini de séquents démontrés par la règle *axiome'*, et pour chacun d'eux un nombre fini de tels couples, on peut énumérer tous les choix possibles d'un couple de propositions atomiques par séquent. Il faut ensuite déterminer, pour chacun de ces choix, s'il existe une substitution σ telle que pour chaque couple (A, B), $\sigma A = \sigma B$.

Par exemple, dans le schéma ci-avant, on a un seul séquent démontré par la règle *axiome'*, et un seul choix pour le couple formé d'une proposition atomique de Γ et d'une proposition atomique de Δ. On doit donc trouver une substitution σ telle que $\sigma(P(f(X))) = \sigma(P(f(f(c))))$, c'est-à-dire une substitution σ qui soit une solution de l'équation

$$P(f(X)) = P(f(f(c)))$$

Cette équation s'appelle un *problème d'unification*. Pour résoudre ce problème, on procède de la manière suivante. Les solutions du problème

$$P(f(X)) = P(f(f(c)))$$

sont les mêmes que celles du problème

$$f(X) = f(f(c))$$

qui sont les mêmes que celles du problème

$$X = f(c)$$

et ce problème a une solution qui est la substitution $f(c)/X$.