correspondant à sa latéralité et, parfois, la règle *axiome*. Enfin, si la règle choisie est la règle $\exists$-droite ou la règle $\forall$-gauche, il faut encore choisir le terme à substituer.

6.2.2 Les choix arborescents et les choix indifférents

Dans l'organisation d'une recherche, quand on se trouve face à un choix : explorer la voie A ou explorer la voie B et que l'on choisit la voie A, deux situations peuvent se produire. Dans certains cas, si la voie A mène à une impasse, il faut revenir en arrière et explorer la voie B. C'est par exemple ainsi que l'on explore les couloirs d'un labyrinthe à la recherche d'une sortie. Il se peut même qu'il faille commencer à explorer la voie B avant d'avoir abouti à un constat d'échec dans l'exploration de la voie A, qui peut ne pas terminer. On parle alors de *choix arborescent*. Dans d'autres cas, si la voie A mène à un échec, on sait que la voie B mènera aussi à un échec, on parle alors de choix *indifférent*. Ainsi, pour faire des œufs mimosa, on peut commencer par faire la mayonnaise ou par faire cuire les œufs. Si on commence par essayer de faire la mayonnaise et que l'on échoue, il est inutile d'essayer de faire cuire les œufs d'abord, cela ne changera rien pour la mayonnaise.

Dans l'organisation de la recherche d'une démonstration dans le calcul des séquents, le choix du séquent à traiter en premier est bien entendu indifférent : l'ordre dans lequel on cherche les démonstrations de $P \wedge Q(c) \vdash P$ et $P \wedge Q(c) \vdash \exists x\ Q(x)$ n'a pas d'importance, car chercher une démonstration d'un séquent ne change pas l'autre.

En revanche, les trois autres choix sont arborescents. L'arborescence du choix de la proposition est illustré par l'exemple suivant. On cherche, une démonstration du séquent $\exists x\ P(x), \forall y\ (P(y) \Rightarrow Q) \vdash Q$. Si on commence par appliquer la règle $\exists$-gauche à la proposition $\exists x\ P(x)$, on obtient le séquent $P(x), \forall y\ (P(y) \Rightarrow Q) \vdash Q$ et on peut appliquer la règle $\forall$-gauche à la proposition $\forall y\ (P(y) \Rightarrow Q)$, en choisissant le terme x, et conclure. En revanche, si on applique d'abord la règle $\forall$-gauche à la proposition $\forall y\ (P(y) \Rightarrow Q)$, avec ce même terme x, on obtient le séquent $\exists x\ P(x), P(x) \Rightarrow Q \vdash Q$, qui n'est pas démontrable. En particulier, la variable x apparaissant libre dans le séquent, appliquer la règle $\exists$-gauche à la proposition $\exists x\ P(x)$ demande de renommer la variable liée x en x' et on obtient alors le séquent $P(x'), P(x) \Rightarrow Q \vdash Q$ qui n'est pas démontrable.

L'arborescence du choix de la règle est illustré par l'exemple suivant. On cherche une démonstration du séquent $\vdash \exists x\ (P(x) \Rightarrow P(f(x)))$. Si on commence par appliquer la règle *contraction-droite* puis deux fois la règle $\exists$-droite avec les termes c et $f(c)$ on obtient le séquent $\vdash P(c) \Rightarrow P(f(c)), P(f(c)) \Rightarrow P(f(f(c)))$