

Proposition 6.6

On obtient un système équivalent au calcul des séquents sans coupures, si on restreint la règle *axiome* aux cas dans lesquels toutes les propositions du séquent démontré sont atomiques.

Démonstration. On montre, par récurrence sur le nombre de connecteurs et quantificateurs de $\Gamma \vdash \Delta$, que, dans le système restreint, les séquents de la forme $\Gamma \vdash \Delta$, où Γ et Δ ont une proposition en commun, sont démontrables.

6.2 La recherche de démonstrations dans le calcul des séquents sans coupures

Puisque toutes les propositions apparaissant dans les prémisses d'une règle du calcul des séquents sans coupures sont obtenues à partir de propositions qui apparaissent dans la conclusion de cette règle, la recherche d'une démonstration dans le calcul des séquents sans coupures ne demande pas de choisir une proposition dans l'ensemble infini des propositions du langage. Cependant, au cours d'une telle recherche, tous les choix n'ont pas disparu.

6.2.1 Les choix

Si on cherche, par exemple, une démonstration du séquent $P \wedge Q(c) \vdash P \wedge \exists x Q(x)$, on peut tout d'abord appliquer une règle à la proposition $P \wedge Q(c)$ ou à la proposition $P \wedge \exists x Q(x)$: c'est le *choix de la proposition* dans le séquent. Si on choisit la proposition $P \wedge \exists x Q(x)$, on peut appliquer ou bien la règle \wedge -droite ou bien la règle *contraction-droite* à cette proposition, c'est le *choix de la règle*. Si on choisit d'appliquer la règle \wedge -droite, on obtient deux séquents à démontrer $P \wedge Q(c) \vdash P$ et $P \wedge Q(c) \vdash \exists x Q(x)$. On doit alors choisir de chercher d'abord une démonstration du premier ou alors une démonstration du second, c'est le *choix du séquent*. Enfin, quand on cherche à démontrer le séquent $P \wedge Q(c) \vdash \exists x Q(x)$, si on applique la règle \exists -droite, on doit choisir le terme à substituer à la variable x , c'est le *choix du terme*.

Dans le cas général, à chaque étape de la recherche, on a un ensemble de séquents à démontrer, il faut donc choisir le séquent à traiter, ensuite il faut choisir la proposition à traiter dans ce séquent. Une fois cette proposition choisie, deux ou trois règles peuvent s'appliquer : la règle correspondant à son connecteur ou quantificateur principal et à sa latéralité, la règle de contraction