démonstration ρ'_1 de $\Gamma' \vdash (t/x)B, A^{m-1}, \Delta'$. L'hypothèse de récurrence, appliquée à π et ρ'_1, puis à ρ et π' donne une démonstration de $\Gamma, \Gamma' \vdash (t/x)B, \Delta, \Delta'$, et de $\Gamma, \Gamma', (t/x)B \vdash \Delta, \Delta'$. L'hypothèse de récurrence appliquée à $(t/x)B$ et les règles de contraction donnent une démonstration de $\Gamma, \Gamma' \vdash \Delta, \Delta'$.

– Si la dernière règle de π est la règle $\exists$-gauche, alors $A = \exists x\ B$ et la dernière règle de π' est la règle $\exists$-droite. Donc π a la forme

$$\dfrac{\dfrac{\rho}{\Gamma, A^{n-1}, B \vdash \Delta}}{\Gamma, A^{n-1}, \exists x\ B \vdash \Delta}\ \exists\text{-gauche}$$

et π' la forme

$$\dfrac{\dfrac{\rho'}{\Gamma' \vdash (t/x)B, A^{m-1}, \Delta'}}{\Gamma' \vdash \exists x\ B, A^{m-1}, \Delta'}\ \exists\text{-droite}$$

Comme x n'est pas une variable libre de Γ, de A ou de Δ, en substituant la variable x par le terme t dans la démonstration ρ, on obtient une démonstration ρ_1 de $\Gamma, A^{n-1}, (t/x)B \vdash \Delta$. L'hypothèse de récurrence, appliquée à π et ρ', puis à ρ_1 et π' donne une démonstration de $\Gamma, \Gamma' \vdash (t/x)B, \Delta, \Delta'$, et de $\Gamma, \Gamma', (t/x)B \vdash \Delta, \Delta'$. L'hypothèse de récurrence appliquée à $(t/x)B$ et les règles de contraction donnent une démonstration de $\Gamma, \Gamma' \vdash \Delta, \Delta'$.

Dans une seconde série de cas, la dernière règle de π ou celle de π' concerne une autre proposition que A. Par exemple, si la dernière règle de π est la règle $\wedge$-gauche, alors $\Gamma = \Gamma_1, B \wedge C$ et π a la forme

$$\dfrac{\dfrac{\rho}{\Gamma_1, A^n, B, C \vdash \Delta}}{\Gamma_1, A^n, B \wedge C \vdash \Delta}\ \wedge\text{-gauche}$$

on applique l'hypothèse de récurrence à ρ et π' et on obtient une démonstration de $\Gamma_1, \Gamma', B, C \vdash \Delta, \Delta'$. En utilisant cette même règle $\wedge$-gauche, on obtient une démonstration de $\Gamma_1, \Gamma', B \wedge C \vdash \Delta, \Delta'$, c'est-à-dire $\Gamma, \Gamma' \vdash \Delta, \Delta'$. On procède de même dans les autres cas.

Exercice 6.1

Montrer que le séquent $P(c) \vee Q(c) \vdash P(c)$ n'a pas de démonstration dans le calcul des séquents sans coupures. En déduire qu'il n'a pas de démonstration en déduction naturelle.