Proposition 6.4

Si le séquent $\Gamma \vdash A$ est démontrable en calcul des séquents, alors il est démontrable dans le système D'.

Démonstration. On montre que si le séquent $\Gamma \vdash \Delta$ est démontrable en calcul des séquents, alors le séquent $\Gamma \vdash \bot, \Delta$ est démontrable dans le système D'. Le résultat en découle car si le séquent $\Gamma \vdash \bot, A$ a une démonstration π dans le système D', alors le séquent $\Gamma \vdash A$ a la démonstration

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\pi}{\Gamma \vdash \bot, A}}{\Gamma \vdash A, A}\ \bot\text{-élim}}{\Gamma \vdash A}\ \text{contraction}$$

La démonstration procède par récurrence sur la structure de la démonstration du séquent $\Gamma \vdash \Delta$ dans le calcul des séquents.

– Si cette démonstration a la forme

$$\dfrac{\dfrac{\pi_1}{\Gamma \vdash A, \Delta} \quad \dfrac{\pi_2}{\Gamma, A \vdash \Delta}}{\Gamma \vdash \Delta}\ \text{coupure}$$

alors, par hypothèse de récurrence, les séquents $\Gamma \vdash \bot, A, \Delta$ et $\Gamma, A \vdash \bot, \Delta$ sont démontrables dans le système D'. Le séquent $\Gamma \vdash \bot, \Delta$ est donc démontrable d'après la proposition 6.3.

– Si cette démonstration a la forme

$$\dfrac{\dfrac{\pi_1}{\Gamma', A, A \vdash \Delta}}{\Gamma', A \vdash \Delta}\ \text{contraction-gauche}$$

alors, par hypothèse de récurrence, le séquent $\Gamma', A, A \vdash \bot, \Delta$ a une démonstration dans le système D'. On montre par récurrence sur la structure de cette démonstration que le séquent $\Gamma', A \vdash \bot, \Delta$ a une démonstration dans le système D'.

– Si cette démonstration a la forme

$$\dfrac{}{\Gamma', \bot \vdash \Delta}\ \bot\text{-gauche}$$

alors, le séquent $\Gamma', \bot \vdash \bot, \Delta$ est démontrable dans le système D' avec la règle *axiome*.

– Si cette démonstration a la forme

$$\dfrac{\dfrac{\pi}{\Gamma', A, B \vdash \Delta}}{\Gamma', A \wedge B \vdash \Delta}\ \wedge\text{-gauche}$$