

### Proposition 6.1 (L'affaiblissement)

Si le séquent  $\Gamma \vdash \Delta$  est démontrable en calcul des séquents, alors c'est également le cas des séquents  $\Gamma, A \vdash \Delta$  et  $\Gamma \vdash A, \Delta$ .

*Démonstration.* Par récurrence sur la structure de la démonstration de  $\Gamma \vdash \Delta$ .

### Proposition 6.2

Si le séquent  $\Gamma \vdash A$  est démontrable dans le système  $D'$ , alors il est démontrable en calcul des séquents.

*Démonstration.* On montre, plus généralement, que si le séquent  $\Gamma \vdash \Delta$  est démontrable dans le système  $D'$ , alors il est démontrable en calcul des séquents. Par récurrence sur la structure de la démonstration de ce séquent dans le système  $D'$ .

- Si cette démonstration a la forme

$$\frac{\frac{\pi}{\Gamma \vdash \perp, \Delta'}}{\Gamma \vdash A, \Delta'} \perp\text{-élim}$$

alors, par hypothèse de récurrence et d'après la proposition 6.1, il existe une démonstration en calcul des séquents  $\pi'$  du séquent  $\Gamma \vdash \perp, A, \Delta'$ . On construit la démonstration

$$\frac{\frac{\pi'}{\Gamma \vdash \perp, A, \Delta'} \quad \frac{}{\Gamma, \perp \vdash A, \Delta'} \perp\text{-gauche}}{\Gamma \vdash A, \Delta'} \text{coupure}$$

- Si la démonstration a la forme

$$\frac{\frac{\pi}{\Gamma \vdash A \wedge B, \Delta'}}{\Gamma \vdash A, \Delta'} \wedge\text{-élim}$$

alors, par hypothèse de récurrence et d'après la proposition 6.1, il existe une démonstration en calcul des séquents  $\pi'$  du séquent  $\Gamma \vdash A \wedge B, A, \Delta'$ . On construit la démonstration

$$\frac{\frac{\pi'}{\Gamma \vdash A \wedge B, A, \Delta'} \quad \frac{}{\Gamma, A, B \vdash A, \Delta'} \text{axiome}}{\frac{\frac{}{\Gamma, A \wedge B \vdash A, \Delta'} \wedge\text{-gauche}}{\Gamma \vdash A, \Delta'} \text{coupure}}$$

On procède de même pour l'autre règle  $\wedge$ -élim.